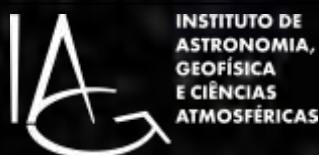


500

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS DE ASTROFÍSICA

Walter J. Maciel



500

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS DE ASTROFÍSICA

Walter J. Maciel



2020

Ficha Catalográfica

Elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Documentação do
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da USP

Maciel, Walter Junqueira
M138 500 exercícios resolvidos de Astrofísica. / Walter Junqueira Maciel.
São Paulo: IAG, 2020.
353 p.

ISBN 978-65-88233-00-9 (e-book)

Acesso em:

www.astro.iag.usp.br/~maciel/teaching/teaching.html

www.iag.usp.br/astronomia/livros-e-apostilas

1. Astrofísica - exercícios I. Título

Para Chico e Zeca

pelo tempo perdido

PREFÁCIO

Este texto inclui uma série de exercícios resolvidos de Astrofísica, compreendendo as áreas de (1) Astrofísica Estelar, (2) Ventos Estelares, (3) Astrofísica Galáctica, (4) Meio Interestelar e (5) Evolução Química. Estes exercícios tem sido utilizados nos cursos dos mesmos nomes, particularmente nos últimos 20 anos, tanto em nível de graduação como em pós-graduação. Por esta razão, esta compilação inclui desde exercícios simples, mais adequados aos estudantes dos anos iniciais, como também exercícios mais trabalhosos, que na verdade podem ser considerados como pequenos projetos.

O texto não tem a pretensão de cobrir todas as áreas da Astrofísica, concentrando-se naquelas em que minha experiência didática é mais relevante. Assim, áreas como Astrofísica Extragaláctica, Cosmologia e Astrofísica Observacional são incluídas apenas de forma marginal. Nas áreas consideradas no texto, algumas subdivisões auxiliam o leitor a identificar as principais subáreas dos exercícios.

Os exercícios são em princípio originais, aplicados a estes cursos junto ao Departamento de Astronomia do IAG/USP, embora alguns deles possam ter sido inspirados em exercícios existentes na literatura, com as devidas modificações para serem incluídos nesta coletânea. Em particular, está incluída a maior parte dos exercícios propostos em meus livros anteriores, (Maciel 1999, 2002, 2005, 2020), constantes também das edições em inglês (Maciel 2013, 2014, 2015). As fontes dos dados utilizados em diversos exercícios são citadas e as referências estão na bibliografia no final do volume.

O público alvo destes exercícios são estudantes de Física e Astronomia, tanto em nível de Graduação como Pós-Graduação, assim como pessoas interessadas em aspectos quantitativos da Astrofísica moderna, com a base adequada em Física e Matemática. Desta forma, a utilização destes exercícios será mais proveitosa se acompanhados da leitura de textos didáticos, alguns dos quais mencionados na bibliografia.

As soluções apresentadas para cada exercício são apenas uma possibilidade, e em alguns casos mais de uma solução é oferecida, com graus diferentes de precisão e profundidade. Recomenda-se que o leitor procure resolver por sua conta os exercícios, antes de examinar a solução proposta. Além disso, o leitor é convidado a procurar novas maneiras de resolver um dado exercício, o que certamente contribuirá para um conhecimento mais profundo dos temas apresentados.

Em um texto como este, que envolve centenas de cálculos e aproximações, é inevitável que alguns erros possam ter permanecido, apesar das rigorosas revisões feitas. Assim, quaisquer correções e sugestões serão bem vindas, podendo ser enviadas ao endereço wjmaciel@usp.br.

São Paulo, Julho de 2020

W. J. Maciel

SUMÁRIO

PARTE 1 – ASTROFÍSICA ESTELAR

PROPRIEDADES FÍSICAS DAS ESTRELAS	1
ATMOSFERAS ESTELARES	17
INTERIORES ESTELARES	45
FORMAÇÃO E EVOLUÇÃO ESTELAR	83

PARTE 2 – VENTOS ESTELARES

EQUAÇÃO DE CONTINUIDADE	93
VENTO SOLAR	100
PERDA DE MASSA DAS ESTRELAS	108
EQUAÇÃO DE EULER	112
EXPANSÃO DE GASES PERFEITOS	127
VENTOS ESTELARES E DINÂMICA	136

PARTE 3 – ASTROFÍSICA GALÁCTICA

COORDENADAS - DISTÂNCIAS - CINEMÁTICA	149
MAGNITUDES - LUMINOSIDADES	165
ESTRUTURA GALÁCTICA - CURVA DE ROTAÇÃO	171
DINÂMICA ESTELAR	188

PARTE 4 – MEIO INTERESTELAR

PROPRIEDADES FÍSICAS	201
CAMPO DE RADIAÇÃO	211
EXCITAÇÃO E IONIZAÇÃO	217
ALARGAMENTO - LARGURA EQUIVALENTE	228
AQUECIMENTO E RESFRIAMENTO	242
NEBULOSAS FOTOIONIZADAS	249
GRÃOS INTERESTELARES	257
MOLÉCULAS INTERESTELARES	266
MASSA DE JEANS E FORMAÇÃO ESTELAR	276

PARTE 5 – EVOLUÇÃO QUÍMICA

ABUNDÂNCIAS - COMPOSIÇÃO QUÍMICA	281
NUCLEOSSÍNTESE	290
PROPRIEDADES DAS ESTRELAS	302
IMF - SFR - AMR	311
VÍNCULOS OBSERVACIONAIS	324
MÉTODOS BÁSICOS - MODELOS	333

BIBLIOGRAFIA	351
--------------------	-----

PARTE 1 - ASTROFÍSICA ESTELAR

PROPRIEDADES FÍSICAS DAS ESTRELAS

1. A partir do valor médio da luminosidade solar, determine a *constante solar*, ou seja, a energia recebida acima da atmosfera da Terra por unidade de área e por unidade de tempo, em $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ e em $\text{cal cm}^{-2} \text{min}^{-1}$.

Solução:

Podemos escrever para a luminosidade de uma estrela de raio R

$$L = 4\pi R^2 F(R)$$

onde $F(R)$ é o fluxo na superfície da estrela, e

$$L = 4\pi r^2 F(r)$$

onde $F(r)$ é o fluxo a uma distância r .

Tomando $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{33} \text{ erg/s}$ e $r_{\odot} = 1.50 \times 10^{13} \text{ cm}$, temos

$$F(r) = \frac{L}{4\pi r^2} = 1.36 \times 10^6 \text{ erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$$

usando $1 \text{ cal} = 4.184 \times 10^7 \text{ erg}$

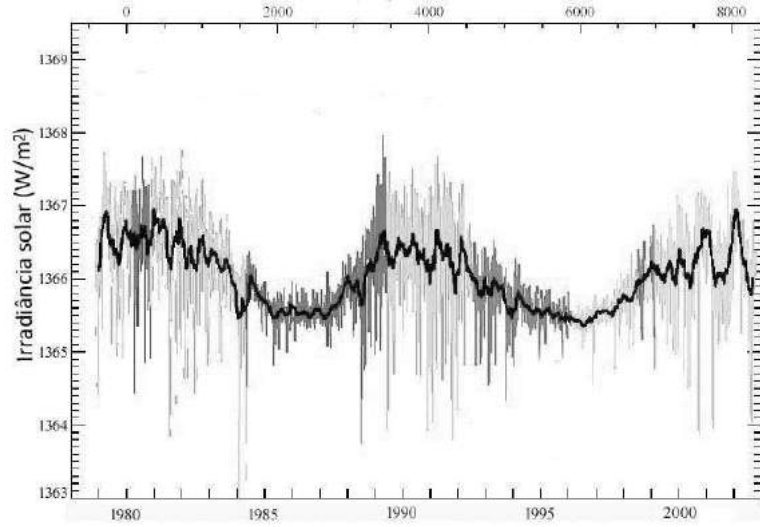
$$F(r) = 1.95 \text{ cal cm}^{-2} \text{min}^{-1}$$

o valor dado por Cox (2000, p. 340) é

$$F(r) = 1.37 \times 10^6 \text{ erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$$

★ ★ ★

2. A figura a seguir (NASA) mostra a variação com o tempo da constante solar, ou irradiância, desde 1978 até 2002. A irradiância é uma medida do fluxo de radiação solar que chega no alto da atmosfera terrestre, sendo medida em W/m^2 . (a) Estime o valor médio da irradiância no intervalo de tempo considerado em W/m^2 e em $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$. (b) Considerando que a distância média da Terra ao Sol é de 150 milhões de km, estime a luminosidade solar em erg/s e em W .



Solução:

(a) Tomando o valor médio do fluxo

$$\langle F \rangle \simeq 1366 \text{ W/m}^2 \simeq 1.366 \times 10^6 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$(b) L_{\odot} \simeq 4 \pi d^2 \langle F \rangle \simeq (4) (\pi) (1.5 \times 10^{13})^2 (1.366 \times 10^6)$$

$$L_{\odot} \simeq 3.86 \times 10^{33} \text{ erg/s} = 3.86 \times 10^{26} \text{ W}$$

★ ★ ★

3. Observações do espectro solar indicam um valor máximo para a irradiância solar dado por $f \simeq 2 \text{ W m}^{-2} \text{ nm}^{-1}$ para o comprimento de onda $\lambda = 5000 \text{ \AA} = 500 \text{ nm}$.

(a) Qual seria o valor observado neste comprimento de onda nas unidades $\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$? (b) Supondo que o fator de diluição geométrica entre a superfície do Sol e a Terra seja $f_d \sim 10^{-5}$, qual seria o fluxo em $5000 \text{ \AA}$ na superfície do Sol?

Solução:

$$(a) f \simeq 2 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ nm}} = (2) (10^7) \frac{\text{erg}}{\text{s}} \frac{1}{(10^4 \text{ cm}^2) (10 \text{ \AA})}$$

$$f \simeq 200 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$$

$$(b) F \simeq \frac{f}{f_d} = \frac{200}{10^{-5}} \simeq 2 \times 10^7 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$$

★ ★ ★

4. Use os dados da órbita da Terra e a terceira lei de Kepler e determine a massa do Sol. Compare seu resultado com o valor $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{33} \text{ g}$.

Solução:

$$P \simeq 365 \text{ d} = 3.16 \times 10^7 \text{ s}$$

$$a = r_{\odot} = 1.50 \times 10^{13} \text{ cm}$$

da terceira lei de Kepler

$$\frac{G}{4\pi^2} P^2 (M_{\odot} + M_T) = a^3$$

tomando

$$M_{\odot} + M_T \simeq M_{\odot} = \frac{4\pi^2 a^3}{G P^2}$$

$$M_{\odot} = 2.00 \times 10^{33} \text{ g}$$

a aproximação acima é boa, pois

$$M_T = 5.97 \times 10^{27} \text{ g}$$

$$\text{de modo que } M_T/M_{\odot} = 3 \times 10^{-6}$$

★ ★ ★

5. Considerando a temperatura efetiva do Sol, $T_{ef} = 5800 \text{ K}$ e o seu raio médio, $R_{\odot} = 6.96 \times 10^{10} \text{ cm}$, (a) estime a luminosidade solar, admitindo que o Sol é uma estrela esférica. (b) Compare seu resultado com a luminosidade obtida a partir do fluxo na superfície do Sol, $F_{\odot} = 6.33 \times 10^{10} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

Solução:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$$

$$L = (4) (3.14) (6.96 \times 10^{10})^2 (5.67 \times 10^{-5}) (5800)^4$$

$$L = 3.91 \times 10^{33} \text{ erg/s}$$

$$L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 F_{\odot} = 3.85 \times 10^{33} \text{ erg/s}$$

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \frac{3.91}{3.85} = 1.02 \longrightarrow 2\%$$

★ ★ ★

6. Considerando que a temperatura da fotosfera do Sol é de aproximadamente 5800 K, qual íon do Fe deve ser dominante nesta região?

Solução:

A energia térmica média das partículas nesta região é

$$E \simeq kT \simeq (1.38 \times 10^{-16})(5800) = 8.0 \times 10^{-13} \text{ erg} \simeq 0.5 \text{ eV}$$

O potencial de ionização do Fe I é de 7.9 eV, e o do Fe II de 16.2 eV portanto, o Fe deve estar essencialmente neutro, na forma Fe I

★ ★ ★

7. (a) Diversas linhas de íons de Fe são observadas na coroa solar, como a linha do íon Fe XV em 284 Å. Considerando que os potenciais de ionização de FeXIV e Fe XV são 392 eV e 457 eV, respectivamente, qual deve ser a temperatura da coroa solar? (b) A abundância de Fe na atmosfera solar, incluindo todas os seus íons, é $\epsilon(\text{Fe})_{\odot} = \log(n_{\text{Fe}}/n_{\text{H}})_{\odot} + 12 = 7.5$. Quantos átomos de H correspondem a um átomo de Fe?

Solução:

(a) A temperatura pode ser estimada tomando $PI \simeq kT$, obtendo

$$T \simeq \frac{PI}{k} \simeq \frac{(457) (1.60 \times 10^{-12})}{(1.38 \times 10^{-16})} \simeq 5.3 \times 10^6 \text{ K}$$

(b) Neste caso

$$\left(\frac{n_{\text{Fe}}}{n_{\text{H}}} \right)_{\odot} \simeq 10^{7.5-12} = 10^{-4.5} = 3.16 \times 10^{-5}$$

há cerca de 30000 átomos de H para cada átomo de Fe na fotosfera solar

★ ★ ★

8. Considerando que os neutrinos movem-se à velocidade da luz, quanto tempo levariam para escapar do Sol? Quanto tempo levariam para chegar até a Terra?

Solução:

$$t_1 \simeq \frac{R_{\odot}}{c} = \frac{6.96 \times 10^{10}}{3 \times 10^{10}} = 2.3 \text{ s}$$

$$t_2 \simeq \frac{d_{\odot}}{c} = \frac{1.5 \times 10^{13}}{3 \times 10^{10}} = 500 \text{ s} = 8.3 \text{ min}$$

★ ★ ★

9. As reações nucleares no interior do Sol produzem cerca de $L_{\nu} \simeq 2 \times 10^{38}$ neutrinos por segundo. Sabendo que o raio da Terra é $R_T = 6400 \text{ km}$, quantos neutrinos devem atingir a Terra em um segundo?

Solução:

Seja $f_{\nu}(R_{\odot})$ o fluxo de neutrinos na superfície do Sol ($\text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$)

$$L_{\nu} = 4 \pi R_{\odot}^2 f_{\nu}(R_{\odot})$$

$$L_\nu = 4 \pi d_T^2 f_\nu(d_T)$$

onde $f_\nu(d_T)$ é o fluxo que atinge a Terra. Portanto

$$f_\nu(d_T) = \frac{L_\nu}{4 \pi d_T^2} \simeq 7.07 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

chamando $L_\nu(d_T)$ o número de neutrinos que atingem a Terra por segundo

$$L_\nu(d_T) \simeq \pi R_T^2 f_\nu(d_T) = 9.10 \times 10^{28} \text{ neutrinos/s}$$

★ ★ ★

10. Um intenso *flare* solar pode liberar uma energia de cerca de 6×10^{25} J. (a) Compare este valor com a energia total liberada em um segundo pelo Sol, medida por sua luminosidade. (b) A bomba de H mais potente construída produziu cerca de 50 megatons de TNT. Quantas destas bombas seriam necessárias para liberar a energia do *flare*? (Dados: 1 ton de TNT = 4.18×10^9 J).

Solução:

$$(a) E_f \simeq 6 \times 10^{25} \text{ J} = 6 \times 10^{32} \text{ erg}$$

$$L_\odot \simeq 3.85 \times 10^{33} \text{ erg/s} = 3.85 \times 10^{26} \text{ J/s}$$

$$E_\odot(1\text{s}) \simeq 3.85 \times 10^{33} \text{ erg} = 3.85 \times 10^{26} \text{ J}$$

$$\frac{E_f}{E_\odot} \simeq \frac{6 \times 10^{25}}{3.85 \times 10^{26}} \simeq 0.16 \longrightarrow 16\%$$

$$(b) n_b \simeq \frac{6 \times 10^{25}}{(50)(4.18 \times 10^{15})} = 2.87 \times 10^8$$

aproximadamente 300 milhões de bombas

★ ★ ★

11. As reservas utilizáveis de petróleo na Terra correspondem a uma energia de cerca de 1.7×10^{22} J. (a) Considerando que o Sol tem uma luminosidade $L_\odot = 3.85 \times 10^{33}$ erg/s, em quanto tempo a energia irradiada pelo Sol torna-se equivalente à energia das reservas de petróleo? (b) Admitindo que a energia radiativa transferida pelo Sol ao nosso planeta seja de aproximadamente 1.2×10^5 TW, em quanto tempo essa energia equivale à energia das reservas de petróleo?

Solução:

$$(a) t_a \simeq \frac{E_p}{L_\odot} \simeq \frac{(1.7 \times 10^{22})(10^7)}{3.85 \times 10^{33}} \simeq 4.4 \times 10^{-5} \text{ s}$$

$$(b) t_b \simeq \frac{1.7 \times 10^{29}}{(1.2 \times 10^5)(10^{12})(10^7)} \simeq 1.4 \times 10^5 \text{ s} \simeq 39.4 \text{ hr}$$

★ ★ ★

12. O terremoto de 1906 em San Francisco, com uma magnitude 7.8, liberou ao todo cerca de 10^{24} erg. Mostre que esta energia é equivalente à energia que o Sol libera para a Terra em cerca de 1 segundo.

Solução:

A energia liberada pelo Sol à Terra por unidade de tempo é

$$L'_{\odot} \simeq \frac{L_{\odot}}{4\pi d_T^2} \pi R_T^2$$

onde $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{33}$ erg/s é a luminosidade do Sol, $d_T = 150 \times 10^6$ km é a distância média Terra-Sol, e $R_T = 6400$ km é o raio da Terra. Obtemos

$$L'_{\odot} \simeq \frac{(3.85 \times 10^{33}) (6.4 \times 10^8)^2}{(4) (1.5 \times 10^{13})^2} \simeq 1.75 \times 10^{24} \text{ erg/s}$$

$$\frac{E_t}{L'_{\odot}} \simeq \frac{10^{24}}{1.75 \times 10^{24}} \simeq 0.6 \text{ s}$$

★ ★ ★

13. Considere um fóton produzido no centro do Sol. (a) Quanto tempo esse fóton levaria para atravessar o Sol e chegar à superfície se não houvesse nenhuma absorção? (b) Suponha que o fóton sofra contínuas absorções e reemissões, de modo que seu trajeto até a superfície possa ser considerado como um processo de *random walk*. Admitindo que as reemissões ocorrem instantaneamente após cada absorção, estime o tempo necessário para o fóton chegar à superfície. Quantos passos são necessários para isso acontecer? Considere que o caminho livre médio dos fótons é $\lambda \simeq 0.5$ cm. (c) Repita os cálculos da letra (b), considerando uma escala de tempo $\delta t \sim 10^{-8}$ s para as reemissões.

Solução:

$$(a) t_a \simeq \frac{R_{\odot}}{c} \simeq 2.3 \text{ s}$$

(b) Chamando N o número de passos

$$t_b \simeq \frac{N\lambda}{c}$$

$$N \simeq \left(\frac{R_{\odot}}{\lambda} \right)^2 \simeq 1.9 \times 10^{22}$$

$$t_b \simeq 3.2 \times 10^{11} \text{ s} \simeq 10^4 \text{ anos}$$

$$(c) \Delta t \simeq N\delta t \simeq 1.9 \times 10^{14} \text{ s}$$

$$t_c \simeq t_b + \Delta t \simeq 1.9 \times 10^{14} \text{ s} \simeq 6 \times 10^6 \text{ anos}$$

★ ★ ★

14. (a) Considerando a luminosidade do Sol $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{33}$ erg/s e seu raio $R_{\odot} = 6.96 \times 10^{10}$ cm, determine o fluxo total na superfície do Sol. (b) Com o valor obtido em (a), determine o fluxo no alto da atmosfera desprezando a extinção entre o Sol e a Terra. (c) Supondo que o hemisfério terrestre voltado para o Sol tenha uma área dada por $S \simeq 2\pi R_T^2$, onde $R_T \simeq 6400$ km é o raio médio da Terra, qual é a energia solar por unidade de tempo que atinge nosso planeta por segundo (em erg/s, W e TW)? (d) O valor correto para o resultado (c) deve ser menor que o valor calculado, uma vez que nem todos os pontos da superfície terrestre recebem a mesma quantidade de energia, que depende da inclinação dos raios solares. De fato, a potência liberada pelo Sol ao nosso planeta é da ordem de 1.2×10^5 TW. Compare este valor com a energia produzida em Itaipu, com uma capacidade instalada de cerca de 14 GW.

Solução:

(a) Neste caso

$$F(R_{\odot}) = \frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2} = 6.32 \times 10^{10} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

(b) Tomando $d_T = 1 \text{ UA} = 1.5 \times 10^{13}$ cm

$$F(d_T) \simeq F(R_{\odot}) \left(\frac{R_{\odot}}{d_T} \right)^2 \simeq 1.36 \times 10^6 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

(c) $L(d_T) \simeq F(d_T) (2\pi R_T^2)$

$$L(d_T) \simeq 3.50 \times 10^{24} \text{ erg/s} \simeq 3.50 \times 10^{17} \text{ W} \simeq 3.50 \times 10^5 \text{ TW}$$

(d) Obtemos a razão

$$\frac{L(\text{Itaipu})}{L(d_T)} \simeq \frac{14 \times 10^{-3}}{1.2 \times 10^5} \simeq 10^{-7}$$

★ ★ ★

15. Uma estrela está a uma distância de 20 pc e sua magnitude aparente é $m = 4.0$. Qual é sua magnitude absoluta? Resolva este problema de duas maneiras: (a) Use a relação entre as magnitudes aparente e absoluta. (b) Sem usar a relação entre as magnitudes, considere que uma diferença de 1 magnitude corresponde a um fator 2.5 no brilho das estrelas.

Solução:

(a) $m - M = 5 \log d - 5$

$$M = m - 5 \log d + 5 = 4 - 5 \log 20 + 5 = 2.5$$

(b) A magnitude absoluta corresponde a uma distância de 10 pc.

De 20 para 10 pc o fluxo aumenta por um fator $2^2 = 4$

um fator de 2.5 no fluxo corresponde a 1 magnitude

um fator de $2.5^2 = 6.25$ no fluxo corresponde a 2 magnitudes

para uma diferença de f magnitudes: $2.5^f = 4$

$$f \log 2.5 = \log 4$$

$$f = \frac{\log 4}{\log 2.5} = \frac{0.6021}{0.3979} \simeq 1.5$$

com uma diferença de 1.5 mag e $m = 4$, temos $M = 4 - 1.5 = 2.5$

★ ★ ★

16. Uma estrela tem tipo espectral M0 III e sua magnitude visual aparente é $m_v = 10.0$. Qual é sua distância?

Solução:

Podemos usar os dados da tabela abaixo (Maciel 1999, tabela 1.5) válida para gigantes frias:

Sp	T_{ef}	M_V	BC	M_{bol}	$\log L/L_\odot$
K0	4800	0.7	-0.50	0.2	1.78
K2	4400	0.5	-0.61	-0.1	1.90
K5	4000	-0.2	-1.02	-1.2	2.34
K7	3800	-0.3	-1.17	-1.5	2.45
M0	3800	-0.4	-1.25	-1.6	2.48
M2	3600	-0.6	-1.62	-2.2	2.74
M5	3300	-0.3	-2.48	-2.8	2.97
M6	3200	-0.2	-2.73	-2.9	3.03

da tabela $M_v \simeq -0.4$

desprezando a extinção interestelar

$$m - M = 5 \log d - 5 = 10.4$$

$$d = 10^{0.2(10.4+5)} \simeq 1200 \text{ pc}$$

★ ★ ★

17. A estrela A tem magnitude aparente $m_A = 5$ e está a uma distância $d_A = 10 \text{ pc}$. A estrela B tem magnitude aparente $m_B = 6$ e está a uma distância

$d_B = 20 \text{ pc}$. (a) Qual das duas estrelas parece mais brilhante? (b) Qual delas é intrinsecamente mais brilhante?

Solução:

(a) A estrela A parece mais brilhante, pois $m_A < m_B$

(b) Desprezando a extinção, as magnitudes absolutas das estrelas são

$$M_A = m_A - 5 \log d_A + 5 = 5.0$$

$$M_B = m_B - 5 \log d_B + 5 = 4.5$$

a estrela B é intrinsecamente mais brilhante, pois $M_B < M_A$

★ ★ ★

18. Uma estrela fria tem temperatura efetiva $T_{ef} = 3200 \text{ K}$, magnitude aparente bolométrica $m_{bol} = 6.0$ e magnitude absoluta bolométrica $M_{bol} = -2.9$. Calcule sua distância, luminosidade e raio.

Solução:

$$m_{bol} - M_{bol} = 5 \log d - 5$$

$$\log d = 2.78 \longrightarrow d = 603 \text{ pc}$$

$$M_{bol} - M_{bol\odot} = -2.5 \log \frac{L}{L_\odot}$$

$$\text{com } M_{bol\odot} = 4.74$$

$$\log \frac{L}{L_\odot} = 3.06$$

$$L = 1.15 \times 10^3 L_\odot = 4.38 \times 10^{36} \text{ erg/s}$$

$$L = 4 \pi R^2 \sigma T_{ef}^4$$

$$R = \left(\frac{L}{4 \pi \sigma T_{ef}^4} \right)^{1/2} = 7.66 \times 10^{12} \text{ cm} \simeq 110 R_\odot$$

★ ★ ★

19. Uma estrela quente tem temperatura efetiva $T_{ef} = 8700 \text{ K}$, magnitude aparente bolométrica $m_{bol} = 7.2$ e magnitude absoluta bolométrica $M_{bol} = 1.6$. Calcule sua distância, luminosidade e raio.

Solução:

Com o mesmo procedimento do exercício anterior

$$d = 132 \text{ pc}$$

$$\log \frac{L}{L_{\odot}} = 1.26$$

$$L = 18.2 L_{\odot} = 7.01 \times 10^{34} \text{ erg/s}$$

$$R = 1.31 \times 10^{11} \text{ cm} \simeq 1.9 R_{\odot}$$

★ ★ ★

20. A estrela Arcturus (α Boo, K1.5 III) tem um diâmetro angular $\phi = 0.020''$ e seu fluxo total observado à distância d é $F(d) = 4.5 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Estime sua temperatura efetiva.

Solução:

$$F(d) \simeq F(R) \left(\frac{R}{d} \right)^2 = F(R) \alpha^2$$

onde

$$\alpha = \frac{R}{d} = \frac{\phi}{2} = \frac{0.020}{2} \frac{\pi}{(3600)(180)} = 4.85 \times 10^{-8} \text{ rad}$$

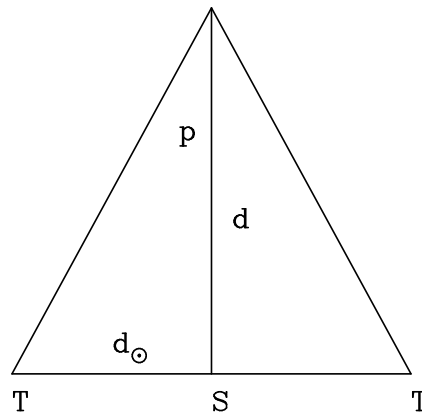
$$F(R) \simeq \frac{F(d)}{\alpha^2} \simeq \sigma T_{ef}^4$$

$$T_{ef} \simeq \left[\frac{4.5 \times 10^{-5}}{(5.67 \times 10^{-5}) (4.85 \times 10^{-8})^2} \right]^{1/4} \simeq 4300 \text{ K}$$

★ ★ ★

21. A paralaxe trigonométrica de uma estrela corresponde à metade de seu deslocamento angular aparente em um intervalo de tempo de cerca de metade do período orbital da Terra em torno do Sol. O parsec é definido como a distância de uma estrela cuja paralaxe p é de um segundo de arco, ou seja, $d(\text{pc}) = 1/p''$. Mostre que $1 \text{ pc} = 3.09 \times 10^{18} \text{ cm}$.

Solução:



Tomando $d_{\odot} = 1.50 \times 10^{13}$ cm

$$p(\text{rad}) = p'' \frac{\pi}{3600 \times 180} = \frac{d_{\odot}(\text{cm})}{d(\text{cm})}$$

$$p'' d(\text{cm}) = p'' d(\text{pc}) x(\text{cm/pc}) = d_{\odot}(\text{cm}) \frac{3600 \times 180}{\pi}$$

$$x = 1.50 \times 10^{13} \frac{3600 \times 180}{\pi} = 3.09 \times 10^{18} \text{ cm/pc}$$

★ ★ ★

22. A estrela α Cen B tem paralaxe trigonométrica $p = 0.75''$, tipo espectral K0V, magnitude visual aparente $V = 1.33$ e índice de cor $B - V = 0.88$. (a) Qual é a distância da estrela em pc e em anos-luz? (b) Use a correlação entre a magnitude absoluta e o índice de cor (ou tipo espectral) e determine a distância da estrela. Esse método é conhecido como *paralaxe espectroscópica*.

Solução:

$$(a) d = \frac{1}{0.75} = 1.33 \text{ pc} = 1.33 \times 3.26 = 4.34 \text{ anos luz.}$$

(b) Usando uma correlação entre a magnitude absoluta e o índice de cor (ver por exemplo Maciel 1999, tabela 1.6)

$$\frac{M_V - 5.9}{0.88 - 0.81} \simeq \frac{6.4 - 5.9}{0.91 - 0.81}$$

$$M_V \simeq 6.3$$

a distância pode ser calculada por

$$V - M_V = 5 \log d - 5$$

com o resultado $d \simeq 1.0$ pc.

Usando a correlação com o tipo espectral temos (Maciel 1999, tabela 1.6)

$$M_V \simeq 5.9 \longrightarrow d \simeq 1.2 \text{ pc}$$

★ ★ ★

23. Considere os dados da tabela abaixo, válidos para estrelas da sequência principal, de classe V (Maciel 1999, tabela 1.6). Faça um ajuste polinomial para a variação da correção bolométrica BC em função da temperatura efetiva T_{ef} , na forma

$$BC = \sum_{i=0}^n a_i (\log T_{ef})^i$$

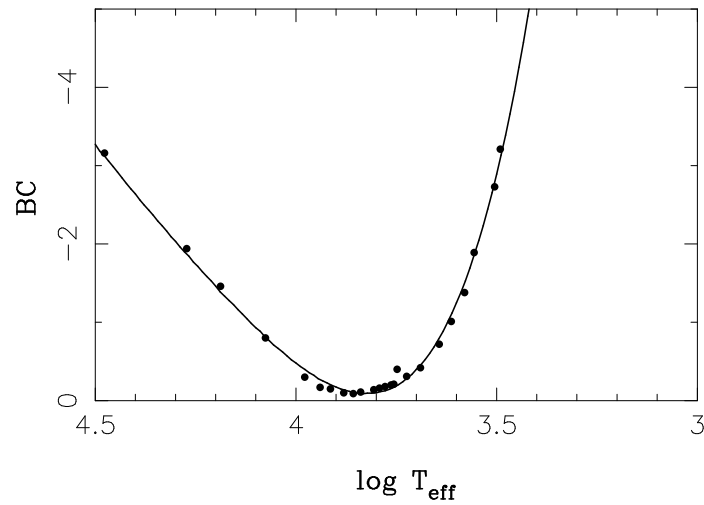
com $n = 5$. Determine as constantes a_i para $i = 0$ a 5. Faça um gráfico da correção bolométrica em função da temperatura efetiva.

T_{ef}	M_V	BC	T_{ef}	M_V	BC
52500	-6.0	-4.75	6400	3.5	-0.14
44500	-5.7	-4.40	6200	4.0	-0.16
41000	-5.5	-3.93	6000	4.4	-0.18
35800	-4.9	-3.54	5800	4.7	-0.20
30000	-4.0	-3.16	5700	5.1	-0.21
18700	-1.6	-1.94	5600	5.5	-0.40
15400	-1.2	-1.46	5300	5.9	-0.31
11900	-0.2	-0.80	4900	6.4	-0.42
9500	0.6	-0.30	4400	7.4	-0.72
8700	1.5	-0.17	4100	8.1	-1.01
8200	1.9	-0.15	3800	8.8	-1.38
7600	2.4	-0.10	3600	9.9	-1.89
7200	2.7	-0.09	3200	12.3	-2.73
6900	3.6	-0.11	3100	13.5	-3.21

Solução:

Um ajuste por mínimos quadrados produz os resultados abaixo

$$a_0 = -10724.319, a_1 = 12032.346, a_2 = -5395.2589, a_3 = 1209.1748, \\ a_4 = -135.48676, a_5 = 6.0703314$$



★ ★ ★

24. Usando os dados da tabela do exercício anterior, construa um diagrama HR para as estrelas da sequência principal em termos de $M_V \times \log T_{ef}$. Qual é o lugar geométrico nesse diagrama das estrelas de raios $R = 0.1, 1.0$ e $10.0 R_{\odot}$?

Solução:

$$L = 4 \pi R^2 \sigma T_{ef}^4$$

$$\log(L/L_{\odot}) = -15.05 + 2 \log(R/R_{\odot}) + 4 \log T_{ef}$$

mas

$$M_{bol} - M_{bol\odot} = -2.5 \log\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right)$$

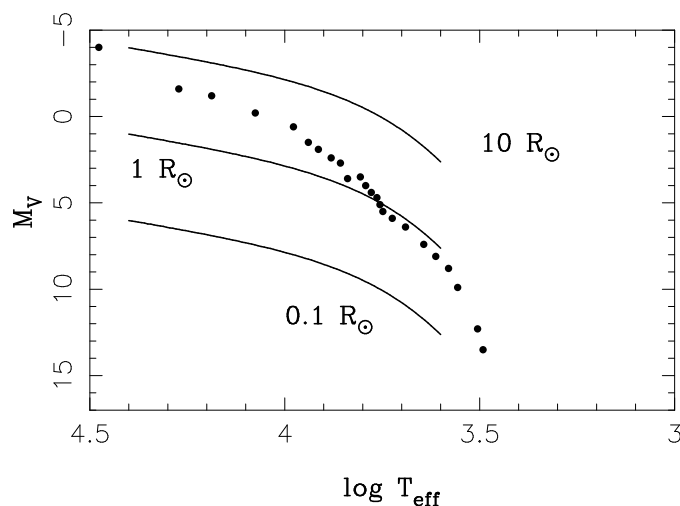
$$M_{bol} = M_V + BC$$

$$M_{bol} = M_V + BC = M_{bol\odot} - 2.5 \log(L/L_{\odot})$$

$$M_V = M_{bol\odot} - 2.5 \log(L/L_{\odot}) - BC$$

$$M_V = M_{bol\odot} + 2.5 (15.05 - 2 \log(R/R_{\odot}) - 4 \log T_{ef}) - BC$$

com os valores de BC do exercício anterior obtemos o gráfico abaixo, com as curvas para $R = 0.1, 1.0$ e $10.0 R_{\odot}$



★ ★ ★

25. Uma estrela variável cefeida clássica tem temperatura efetiva $T_{ef} = 5200$ K e um período de 10 dias. Estime sua luminosidade, $L/L_{\odot}$. Onde esta estrela estaria localizada no diagrama HR? (Dado: $BC = -0.3$).

Solução:

Podemos adotar uma relação período luminosidade na forma

$$M_v = -2.4 (\log P - 1) - 4.1$$

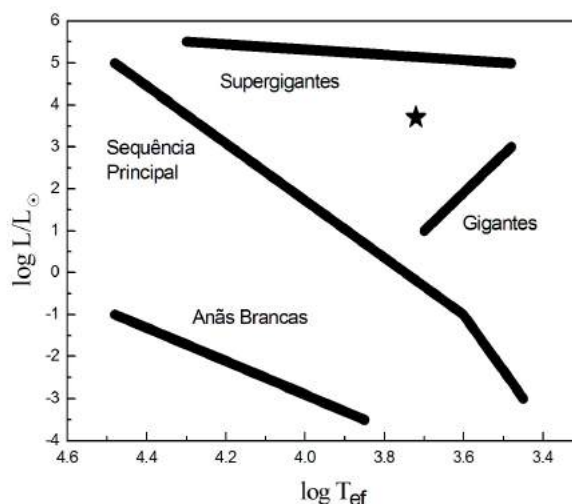
obtendo $M_v \simeq -4.1$. A magnitude bolométrica é

$$M_{bol} = M_v + BC = -4.4$$

e a luminosidade é dada por

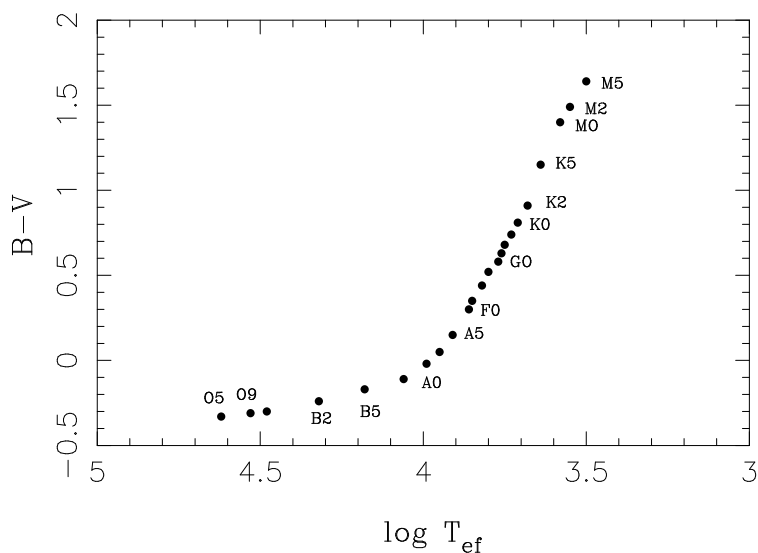
$$\frac{L}{L_{\odot}} \simeq 10^{-0.4(M_{bol} - M_{bol\odot})} \simeq 4500$$

$$\log(L/L_{\odot}) \simeq 3.7$$



★ ★ ★

26. A estrela BD +11 2576 tem magnitude aparente visual igual a 9.05 e magnitude absoluta visual 9.64. Sua cor é $B - V = +1.49$, e seu tipo espectral M1V. (a) Use a relação entre os tipos espectrais e as cores intrínsecas de estrelas da sequência principal mostrada na figura abaixo e estime seu excesso de cor. (b) Qual é a distância da estrela?



Solução:

(a) Da figura podemos estimar a cor intrínseca, $(B - V)_0$. Como o tipo espectral M1 está entre M0 e M2, temos

$$\text{M0: } (B - V)_0 \simeq 1.40, E(B - V) = 1.49 - 1.40 = 0.09$$

$$M2: (B - V)_0 \simeq 1.50, E(B - V) = 1.50 - 1.49 = 0.01$$

o valor de $E(B - V)$ deve ser $0.09 \geq E(B - V) \geq 0.01$

um valor médio seria $E(B - V) \simeq 0.05$

(b) A distância pode ser calculada de

$$V - M_V = 5 \log d - 5 + R_v \quad E(B - V)$$

$$\log d = 0.2 \left[V - M_V + 5 - R_v \quad E(B - V) \right]$$

adotando um valor médio $R_v \simeq 3$, temos $7.5 \geq d(\text{pc}) \geq 6.7$

★ ★ ★

27. Estrelas dos tipos espectrais O, B, têm velocidades de rotação altas, da ordem de centenas de km/s, podendo apresentar desvios da simetria esférica. Considere uma estrela de massa M , raio R e velocidade de rotação no equador ω . (a) Que condição deve ser satisfeita para manter a simetria esférica? (c) Esta condição se aplica ao Sol? (c) E para uma estrela quente de tipo espectral O5V, com $M \simeq 60 M_\odot$, $R \simeq 12 R_\odot$ e $v_{\text{rot}} \simeq 200 \text{ km/s}$?

Solução:

Para um elemento de massa m em $r = R$, a força centrífuga devida à rotação é $m \omega^2 R$. Para manter a simetria esférica devemos ter

$$m \omega^2 R \ll \frac{G M m}{R^2}$$

que pode ser escrita como

$$\eta = \frac{\omega^2}{(G M / R^3)} \ll 1$$

(b) Para o Sol, com um período de rotação médio $P_\odot = 2\pi / \omega_\odot = 27$ dias

$$\omega_\odot \simeq 2.7 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

$$G M_\odot / R_\odot^3 \simeq 3.9 \times 10^{-7} \text{ s}^{-2}$$

$$\eta \simeq 1.9 \times 10^{-5} \ll 1$$

portanto, os desvios da simetria esférica são desprezíveis

(c) Neste caso, $\eta \simeq 0.04$, havendo um pequeno desvio da simetria esférica.

★ ★ ★

28. Duas estrelas têm temperaturas efetivas de 5000 K e 50000 K, respectivamente. Em que frequências estas estrelas deverão emitir mais energia?

Solução:

Admitindo uma emissão de corpo negro, o máximo da emissão ocorre para

$$\nu_{max} = \frac{cT}{0.29} \quad \text{para } B_\lambda$$

$$\nu_{max} = 2.821 \frac{kT}{h} \quad \text{para } B_\nu$$

os valores correspondentes estão na tabela abaixo

	A (5000 K)	B (50000 K)
B_λ		
ν_{max}	$5.17 \times 10^{14} \text{ Hz}$	$5.17 \times 10^{15} \text{ Hz}$
λ_{max}	$5800 \text{ \AA}$	$580 \text{ \AA}$
B_ν		
ν_{max}	$2.94 \times 10^{14} \text{ Hz}$	$2.94 \times 10^{15} \text{ Hz}$
λ_{max}	$10200 \text{ \AA}$	$1020 \text{ \AA}$

★ ★ ★

29. A energia emitida por segundo por uma estrela é $L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4 = S \sigma T_{ef}^4$, onde S é a área da superfície da estrela. Uma pessoa também emite radiação. Em condições normais, a temperatura do corpo humano é de cerca de 37°C ou $T \simeq 310 \text{ K}$. A área do corpo de uma pessoa é da ordem de $S \simeq 1.7 \text{ m}^2$, aproximadamente. (a) Qual é a energia emitida por segundo por uma pessoa? (b) Qual é o comprimento de onda característico desta emissão?

Solução

(a) A energia emitida por segundo por uma pessoa é

$$L_p \simeq (1.7 \times 10^4) (5.67 \times 10^{-5}) (310)^4 \simeq 8.9 \times 10^9 \text{ erg/s} \simeq 890 \text{ J/s} = 890 \text{ W}$$

(b) De acordo com a lei de Wien, o comprimento de onda que corresponde ao máximo da emissão é

$$\lambda_{max} T \simeq 0.29$$

$$\lambda_{max} \simeq 0.29/310 \simeq 9.35 \times 10^{-4} \text{ cm} \simeq 93500 \text{ \AA} \simeq 9350 \text{ nm} \simeq 9.35 \text{ }\mu\text{m},$$

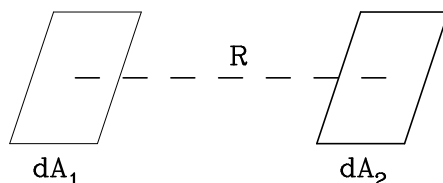
Esta emissão ocorre principalmente no infravermelho. Este resultado é aproximado, pois partes diferentes do corpo têm temperaturas diferentes.

★ ★ ★

ATMOSFERAS ESTELARES

30. Considere um feixe de radiação propagando-se no vácuo. Sejam dA_1 e dA_2 dois elementos de área separados pela distância R , colocados perpendicularmente ao feixe. Chamando $I_{\nu 1}$ e $I_{\nu 2}$ a intensidade específica da radiação na frequência ν em dA_1 e dA_2 , respectivamente, mostre que $I_{\nu 1} = I_{\nu 2}$.

Solução:



A radiação que passa por dA_1 e chega em dA_2 no tempo dt é $I_{\nu 2} dA_2 d\nu d\omega_2 dt$ onde $d\omega_2 = dA_1/R^2$ é o ângulo sólido de dA_1 em dA_2 . Esta energia deve ser igual à energia que passa em dA_1 dentro do ângulo sólido subtendido por dA_2 , $I_{\nu 1} dA_1 d\nu d\omega_1 dt$, onde $d\omega_1 = dA_2/R^2$. Portanto

$$I_{\nu 2} dA_2 d\nu d\omega_2 dt = I_{\nu 1} dA_1 d\nu d\omega_1 dt$$

$$I_{\nu 2} dA_2 d\nu \frac{dA_1}{R^2} dt = I_{\nu 1} dA_1 d\nu \frac{dA_2}{R^2} dt$$

ou seja, $I_{\nu 1} = I_{\nu 2}$

★ ★ ★

31. Prove as relações correspondentes à lei de Wien

$$h\nu_{max} = 2.821 kT \quad (1)$$

onde ν está em Hz, T em K, e k é a constante de Boltzmann

$$\lambda_{max} T = 0.290 \quad (2)$$

onde λ está em cm e T em K.

Solução

Em termos de B_ν

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$$x = \frac{h\nu}{kT} \quad dx = \frac{h d\nu}{kT}$$

$$\frac{dB_\nu}{d\nu} = \frac{dB_\nu}{dx} \frac{dx}{d\nu} = \frac{h}{kT} \frac{dB_\nu}{dx}$$

$$B_\nu = \frac{2 k^3 T^3 x^3}{h^2 c^2} \frac{1}{e^x - 1} = \alpha \frac{x^3}{e^x - 1}$$

$$\frac{dB_\nu}{dx} \rightarrow 0$$

$$3(e^x - 1)\alpha x^2 - \alpha x^3 e^x = 0$$

$$\frac{x e^x}{e^x - 1} = 3$$

$$x = 2.821$$

portanto obtemos a equação (1)

Em termos de B_λ

$$B_\lambda = \frac{2 h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

$$x = \frac{h c}{\lambda k T} \quad dx = -\frac{h c}{k T} \frac{d\lambda}{\lambda^2} = -\frac{k T}{h c} x^2 d\lambda$$

$$\frac{dB_\lambda}{d\lambda} = \frac{dB_\lambda}{dx} \frac{dx}{d\lambda} = -\frac{k T}{h c} x^2 \frac{dB_\lambda}{dx}$$

$$B_\lambda = \frac{2 k^5 T^5}{h^4 c^3} \frac{x^5}{e^x - 1}$$

$$\frac{dB_\lambda}{dx} \rightarrow 0, \quad \frac{x e^x}{e^x - 1} = 5$$

$$x = 4.965$$

$$\lambda_{max} = \frac{h c}{4.965 k T} = \frac{0.290}{T}$$

portanto obtemos a equação (2)

★ ★ ★

32. Considere as expressões do exercício anterior e mostre que os comprimentos de onda correspondentes aos máximos de B_ν e B_λ são diferentes.

Solução:

Da equação para B_ν temos

$$\frac{h c}{\lambda_{max}} = 2.821 k T$$

$$\lambda_{max} = \frac{h c}{2.821 k T} = \frac{0.51}{T}$$

Da equação para B_λ temos

$$\lambda'_{max} = \frac{0.29}{T}$$

$$\lambda'_{max} \neq \lambda_{max}$$

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda'_{max}} = \frac{0.51}{0.29} = 1.76$$

★ ★ ★

33. Integre a expressão para a intensidade específica I_λ em todos os comprimentos de onda, e mostre que $I = B(T) = (\sigma/\pi)T^4$, onde σ é constante de Stefan-Boltzmann,

$$\sigma = \frac{2 \pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} = 5.67 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}$$

Solução:

$$(a) \ I = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda = \int_0^\infty B_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \frac{2 h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda$$

$$x = \frac{h c}{\lambda k T} \quad dx = -\frac{h c}{k T} \frac{d\lambda}{\lambda^2} = -\frac{k T}{h c} x^2 d\lambda$$

$$I = \frac{2 k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$I = B(T) = \frac{2 \pi^4 k^4}{15 h^3 c^2} T^4 = \frac{\sigma}{\pi} T^4$$

★ ★ ★

34. Repita o exercício anterior e integre a expressão para a intensidade específica I_ν em todas as frequências, e mostre que $I = B(T) = (\sigma/\pi) T^4$.

Solução

A função de Planck é

$$B_\nu(T) = \frac{2 h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

definindo $x = h \nu / k T$, temos $dx = h d\nu / k T$, de modo que

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{2 h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

$$B(T) = \frac{2 k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{2 k^4 T^4}{h^3 c^2} \frac{\pi^4}{15} = \frac{\sigma}{\pi} T^4$$

★ ★ ★

35. Considere um campo de radiação em que a intensidade específica é isotrópica, isto é, não depende da direção considerada. Determine a intensidade média, fluxo, densidade de energia e pressão da radiação em uma frequência ν .

Solução:

A intensidade média J_ν é definida por

$$J_\nu = \frac{\int I_\nu d\omega}{\int d\omega} = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\omega$$

de modo que, no caso isotrópico

$$J_\nu = \frac{4\pi}{4\pi} I_\nu = I_\nu$$

o fluxo pode ser definido por

$$F_\nu = \int I_\nu \cos \theta d\omega$$

de modo que

$$F_\nu = I_\nu \int \cos \theta d\omega = I_\nu \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta = 0$$

para a densidade de energia

$$U_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\omega$$

$$U_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu$$

para a pressão da radiação

$$P_{r\nu} = \frac{1}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta d\omega$$

$$P_{r\nu} = \frac{I_\nu}{c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{3c} I_\nu = \frac{1}{3} U_\nu$$

★ ★ ★

36. Mostre que a função de Planck $B_\nu(T)$ tem duas aproximações importantes para regiões de altas ou baixas frequências, $h\nu/kT \gg 1$ e $h\nu/kT \ll 1$.

Solução:

A função de Planck é

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

para altas frequências

$$B_\nu(T) \simeq \frac{2 h \nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT} \quad (h\nu/kT \gg 1)$$

que é a distribuição de Wien. Para baixas frequências

$$B_\nu(T) \simeq \frac{2 \nu^2 k T}{c^2} \quad (h\nu/kT \ll 1)$$

que é a distribuição de Rayleigh-Jeans

★ ★ ★

37. A partir da distribuição de Rayleigh-Jeans $B_\nu(T)$ obtida no exercício anterior, obtenha uma expressão para $B_\lambda(T)$ em função do comprimento de onda λ .

Solução:

Podemos escrever

$$B_\lambda d\lambda = B_\nu d\nu$$

$$B_\lambda = B_\nu \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| = \frac{2 \nu^2 k T}{c^2} \frac{c}{\lambda^2} = \frac{2 k T}{c^2} \frac{c^2}{\lambda^2} \frac{c}{\lambda^2}$$

$$B_\lambda = \frac{2 c k T}{\lambda^4}$$

★ ★ ★

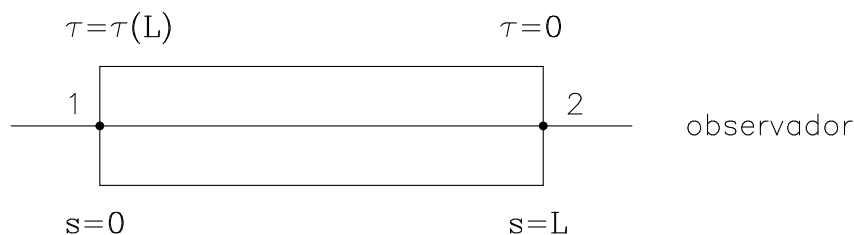
38. Considere a equação de transporte radiativo na forma

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - \frac{j_\nu}{k_\nu}$$

onde τ_ν é a profundidade óptica à frequência ν tal que $d\tau_\nu = -k_\nu ds$ e j_ν e k_ν são os coeficientes de emissão e absorção, respectivamente. Mostre que, se os coeficientes forem constantes, a solução desta equação pode ser escrita

$$I_\nu(L) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu(L)} + S_\nu [1 - e^{-\tau_\nu(L)}]$$

onde $S_\nu = j_\nu/k_\nu$ é a função fonte (ver figura abaixo).



Solução:

Multiplicando ambos os membros da equação por $e^{-\tau_\nu}$, obtemos

$$e^{-\tau_\nu} \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = e^{-\tau_\nu} I_\nu - \frac{j_\nu}{k_\nu} e^{-\tau_\nu}$$

mas

$$\frac{d}{d\tau_\nu} (e^{-\tau_\nu} I_\nu) = e^{-\tau_\nu} \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} - e^{-\tau_\nu} I_\nu$$

portanto,

$$\frac{d}{d\tau_\nu} (e^{-\tau_\nu} I_\nu) = -\frac{j_\nu}{k_\nu} e^{-\tau_\nu}$$

integrando entre dois pontos, obtemos para a intensidade emergente

$$I_\nu(L) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu(L)} + \int_0^{\tau_\nu(L)} \frac{j_\nu}{k_\nu} e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu$$

se os coeficientes de emissão e absorção forem constantes, temos

$$I_\nu(L) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu(L)} + \frac{j_\nu}{k_\nu} \left[1 - e^{-\tau_\nu(L)} \right]$$

$$I_\nu(L) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu(L)} + S_\nu \left[1 - e^{-\tau_\nu(L)} \right]$$

★ ★ ★

39. Como se modifica a solução da equação de transporte obtida no exercício anterior nos casos opticamente fino, ou transparente e no caso opticamente espesso?

Solução:

Para o caso opticamente fino temos $\tau_\nu(L) \ll 1$, de modo que

$$I_\nu(L) = I_\nu(0) + \frac{j_\nu}{k_\nu} \left[1 - \left(1 - \tau_\nu(L) \right) \right] = I_\nu(0) + \frac{j_\nu}{k_\nu} \tau_\nu(L)$$

$$I_\nu(L) = I_\nu(0) + \frac{j_\nu}{k_\nu} (k_\nu L) = I_\nu(0) + j_\nu L$$

no caso opticamente espesso, $\tau_\nu(L) \gg 1$, portanto

$$I_\nu = \frac{j_\nu}{k_\nu} = S_\nu$$

★ ★ ★

40. No caso isotrópico o fluxo da radiação é nulo, mas em algumas aplicações podemos considerar o fluxo parcial em um hemisfério F_ν^+ , desprezando a radiação que se propaga no hemisfério oposto. Mostre que neste caso

$$F_\nu^+ \simeq \pi I_\nu$$

Solução:

Da definição do fluxo

$$F = \int I \cos \theta \, d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I(\theta, \phi) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

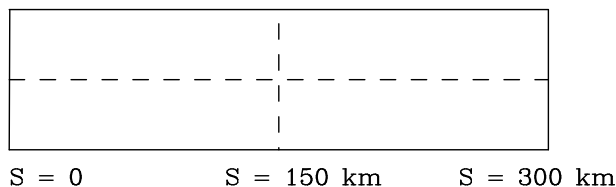
podemos escrever

$$F_\nu^+ \simeq \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} I_\nu \cos \theta \sin \theta \, d\theta = 2\pi I_\nu \left. \frac{\sin^2 \theta}{2} \right|_0^{\pi/2} = 2\pi I_\nu \frac{1}{2}$$

$$F_\nu^+ \simeq \pi I_\nu$$

★ ★ ★

41. Considere uma lâmina de espessura $L = 300$ km na fotosfera solar, onde propagam-se fótons com comprimento de onda $\lambda = 5000 \text{ \AA}$. Os fótons podem sofrer absorções dentro da lâmina, com um coeficiente de absorção $k_\lambda = 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$, mas não há emissões. (a) Faça um gráfico da intensidade transmitida $I_\nu(S)/I_\nu(0)$ relativa à intensidade original em função da posição. (b) Inclua neste gráfico a solução obtida admitindo que, a partir da metade da espessura da lâmina, o coeficiente de absorção é reduzido por um fator 2.

Solução:

$$(a) \frac{I_\lambda(S)}{I_\lambda(0)} = e^{-k_\lambda S}$$

(b) Para $0 \leq S \leq S_m$, com $S_m = 150$ km

$$\frac{I_\lambda(S)}{I_\lambda(0)} = e^{-k_\lambda S}$$

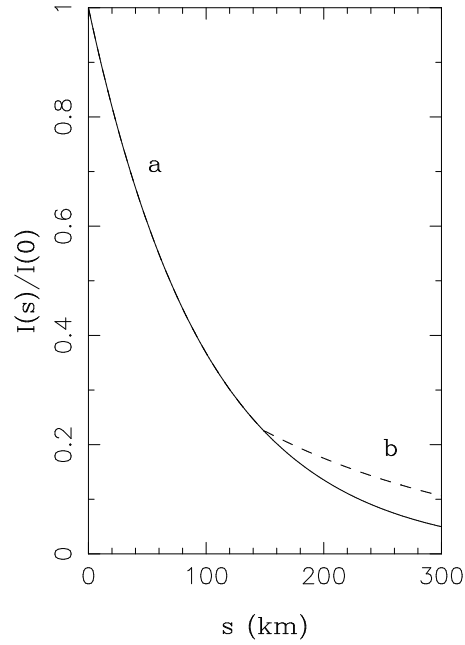
para $S_m \leq S \leq L$

$$\frac{I_\lambda(S)}{I_\lambda(S_m)} = e^{-[k_\lambda (S - S_m)/2]}$$

$$\frac{I_\lambda(S)}{I_\lambda(S_m)} = \frac{I_\lambda(S)}{I_\lambda(0)} \frac{I_\lambda(0)}{I_\lambda(S_m)}$$

$$\frac{I_\lambda(S)}{I_\lambda(0)} = \frac{I_\lambda(S_m)}{I_\lambda(0)} e^{-[k_\lambda (S - S_m)/2]}$$

o gráfico está a seguir



★ ★ ★

42. Como poderia ser escrita a equação de transporte radiativo em coordenadas esféricas? Escolha o eixo z na direção do observador, e admita simetria azimutal, isto é, a intensidade I_ν não depende do ângulo azimutal ϕ .

Solução

Neste caso a equação de transporte radiativo pode ser escrita

$$\frac{dI_\nu}{dz} = -k_\nu I_\nu + k_\nu S_\nu$$

com simetria azimutal, $I_\nu(r, \theta)$, e a equação fica

$$\frac{dI_\nu}{dz} = \frac{\partial I_\nu}{\partial r} \frac{dr}{dz} + \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dz}$$

Mas, $dr = \cos \theta dz$ e $r d\theta = -\sin \theta dz$

de modo que

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} = -k_\nu I_\nu + k_\nu S_\nu$$

★ ★ ★

43. Em um atmosfera estelar plano-paralela, a intensidade em uma frequência ν na direção caracterizada pelo ângulo θ , tal que $\cos \theta = \mu$ e na profundidade óptica τ_ν pode ser escrita

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = B_\nu(\tau_\nu) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}$$

Mostre que neste caso a densidade de energia U_ν depende apenas do termo isotrópico caracterizado pela função de Planck e que o fluxo depende apenas do termo anisotrópico, caracterizado pela variação da função de Planck com a profundidade óptica.

Solução

A densidade de energia é

$$U_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\omega = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi I_\nu \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{c} \int_0^\pi I_\nu \sin\theta d\theta = \frac{2\pi}{c} \int_{+1}^{-1} I_\nu (-d\mu)$$

$$U_\nu = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{+1} I_\nu d\mu$$

usando a intensidade

$$U_\nu = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{+1} \left[B_\nu(\tau_\nu) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \right] d\mu = \frac{2\pi}{c} \left[B_\nu(\tau_\nu) \times 2 + \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \times 0 \right]$$

$$U_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu(\tau_\nu) \quad (\text{termo isotrópico})$$

para o fluxo temos

$$F_\nu = \int I_\nu \cos\theta d\omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi I_\nu \cos\theta \sin\theta d\theta$$

$$F_\nu = 2\pi \int_0^\pi I_\nu \cos\theta \sin\theta d\theta = 2\pi \int_{+1}^{-1} I_\nu \mu (-d\mu) = 2\pi \int_{-1}^{+1} I_\nu \mu d\mu$$

$$F_\nu = 2\pi \int_{-1}^{+1} \left[B_\nu(\tau_\nu) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \right] \mu d\mu = 2\pi \left[B_\nu(\tau_\nu) \times 0 + \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \times (2/3) \right]$$

$$F_\nu = \frac{4\pi}{3} \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \quad (\text{termo anisotrópico})$$

★ ★ ★

44. (a) Considere o resultado do exercício anterior e estime a razão entre os termos anisotrópico e isotrópico. (b) Admita que o resultado obtido seja também válido para quantidades integradas. Supondo que a atmosfera emita como um corpo negro à temperatura T_{ef} , como fica a razão entre os termos anisotrópico e isotrópico?

Solução

(a) A razão é dada por

$$\frac{dB_\nu/d\tau_\nu}{B_\nu(\tau_\nu)} = \frac{3 F_\nu}{4 \pi} \frac{4 \pi}{c U_\nu} = \frac{3 F_\nu}{c U_\nu}$$

(b) Neste caso temos

$$\frac{3 F_\nu}{c U_\nu} \simeq \frac{3 F}{c U}$$

o fluxo é $F = \sigma T_{ef}^4$. Em ET

$$U = \frac{4 \pi}{c} B(T) = \left(\frac{4 \pi}{c} \right) \left(\frac{\sigma}{\pi} \right) T^4 = \frac{4 \sigma}{c} T^4$$

de modo que

$$\frac{dB_\nu/d\tau_\nu}{B_\nu(\tau_\nu)} \simeq \frac{3}{4} \left(\frac{T_{ef}}{T} \right)^4$$

★ ★ ★

45. O valor medido para a intensidade específica no centro do disco solar é $I_{5010} = 4.03 \times 10^{13} \text{ W m}^{-3} \text{ sr}^{-1} = 4.03 \times 10^6 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Å}^{-1} \text{ sr}^{-1}$. (a) Considerando em primeira aproximação que este valor se aplica a todo o disco solar, determine o fluxo em $\lambda = 5010 \text{ Å}$ na superfície do Sol, onde a coordenada espacial $r = R_\odot = 6.96 \times 10^{10} \text{ cm}$. (b) Qual seria o fluxo total na superfície do Sol? (c) Considerando a diluição deste fluxo no caminho entre a superfície do Sol e a Terra, e que a distância Terra-Sol é de $1 \text{ UA} = 1.5 \times 10^{13} \text{ cm}$, determine o fluxo observado no alto da atmosfera.

Solução:

(a) O fluxo em $\lambda = 5010 \text{ Å}$ é

$$F_{5010}(R_\odot) \simeq \int I_{5010} \cos \theta d\omega = 2 I_{5010} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$F_{5010}(R_\odot) \simeq 4 \pi I_{5010} \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} = 2 \pi I_{5010}$$

$$F_{5010}(R_\odot) \simeq 2.53 \times 10^7 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Å}^{-1}$$

(b) A maior parte da radiação solar concentra-se entre $\lambda \simeq 4500 \text{ Å}$ e $\lambda \simeq 7000 \text{ Å}$, centrada em $\lambda \simeq 5000 \text{ Å}$. Portanto, o fluxo total na superfície do Sol é, em primeira aproximação

$$F(R_\odot) \simeq F_{5010} \Delta\lambda = F_{5010}(R_\odot) (7000 - 4500)$$

$$F(R_\odot) \simeq (2.53 \times 10^7) (2500) = 6.33 \times 10^{10} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

(c) Com a diluição, o fluxo observado no alto da atmosfera da Terra é

$$F(\text{UA}) \simeq \left(\frac{R_{\odot}}{\text{UA}} \right)^2 F(R_{\odot}) = 1.36 \times 10^6 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

Este valor pode ser comparado com o fluxo solar efetivamente observado no alto da atmosfera, ou constante solar (cf. Exercício 1)

$$S = 1.4 \times 10^6 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

★ ★ ★

46. Considere uma estrela esférica de raio R que emite radiação uniformemente em todas as direções com intensidade I . Estime a intensidade média J e o fluxo F a uma distância r da estrela (cf. Swihart 1968).

Solução:

A intensidade média à distância r pode ser obtida por

$$J = \int J_{\nu} d\nu = \frac{1}{4\pi} \int I d\omega$$

onde a integral é feita no ângulo sólido compreendido pela estrela.

Sendo θ_r o raio angular da estrela vista da distância r , $\sin\theta_r = R/r$. Como $d\omega = \sin\theta d\theta d\phi$, a intensidade média é dada por

$$J(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_r} \sin\theta d\theta = \frac{1}{2} I (1 - \cos\theta_r)$$

$$J(r) = \frac{I}{2r} \left[r - (r^2 - R^2)^{1/2} \right]$$

considerando que

$$(a + b)^n \simeq a^n + n a b^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \dots$$

e tomando $r \gg R$, temos $(r^2 - R^2)^{1/2} \simeq r - R^2/2r$, de modo que a intensidade média fica

$$J(r) \simeq \frac{I R^2}{4 r^2}$$

Para o fluxo, temos

$$F(r) = \int I \cos\theta d\omega$$

$$F(r) = I \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_r} \cos\theta \sin\theta d\theta = \pi I \sin^2\theta_r$$

$$F(r) = \frac{\pi I R^2}{r^2}$$

★ ★ ★

47. Uma estrela esférica de tipo espectral MIII tem luminosidade $\log(L/L_{\odot}) = 3.0$ e raio $R/R_{\odot} = 100$. (a) Qual é o fluxo na superfície da estrela? (b) Supondo que a estrela está a uma distância de 20 pc, qual seria o fluxo observado no alto da atmosfera da Terra? Despreze a extinção interestelar.

Solução:

$$(a) L = 4 \pi R^2 F$$

$$F(R) = \frac{L}{4 \pi R^2} = \frac{(10^3)(3.85 \times 10^{33})}{4 \pi (100 \times 6.96 \times 10^{10})^2}$$

$$F(R) = 6.32 \times 10^9 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} = 6.32 \times 10^6 \text{ W/m}^2$$

$$(b) \text{ Para } r = 20 \text{ pc}$$

$$F(r) \simeq F(R) \left(\frac{R}{r} \right)^2 \simeq F(R) \left[\frac{100 \times 6.96 \times 10^{10}}{20 \times 3.09 \times 10^{18}} \right]^2 \simeq 1.27 \times 10^{-14} F(R)$$

$$F(r) \simeq 8.03 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \simeq 8.03 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2}$$

★ ★ ★

48. Um modelo para a fotosfera solar (Cox 2000, p. 349) produz os resultados mostrados na tabela a seguir, onde τ é a profundidade óptica em $\lambda = 5000 \text{ \AA}$, T é a temperatura determinada pelo modelo e $B_{\lambda}(T)$ é a função de Planck para cada temperatura (unidades cgs). Estime a variação $dB_{\lambda}/d\tau$, e a razão entre os termos anisotrópico e isotrópico definidos no Exercício 43. Faça um gráfico de T em função de τ e da razão dos termos anisotrópico e isotrópico em função da profundidade óptica. Inclua neste gráfico a razão obtida com a aproximação do exercício 44. Adote $T_{ef} = 5800 \text{ K}$.

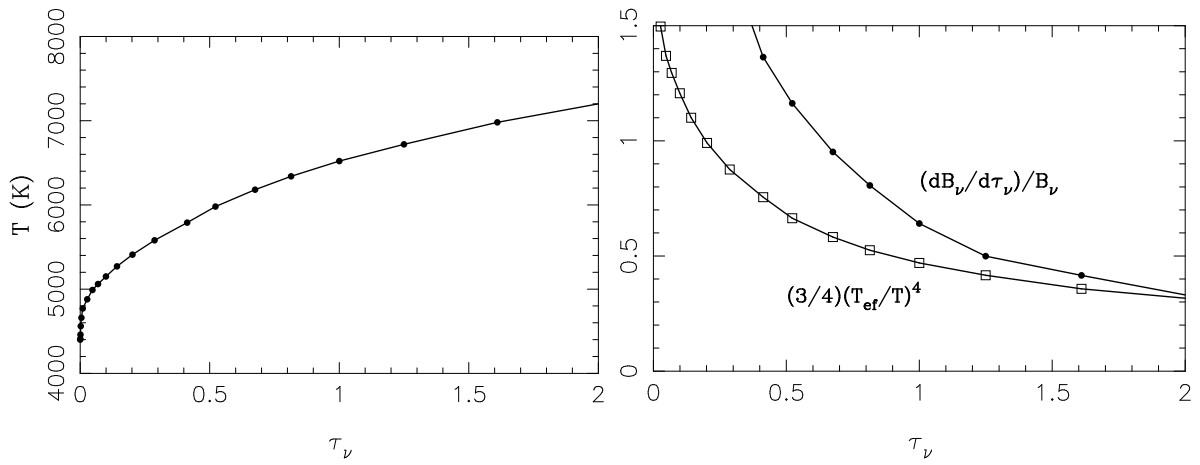
Solução

Do Exercício 44, temos

$$\frac{dB_{\nu}/d\tau_{\nu}}{B_{\nu}(\tau_{\nu})} = \frac{3}{4} \left(\frac{T_{ef}}{T} \right)^4$$

os resultados estão mostrados na figura a seguir

τ	T	$B_\lambda(T)$
2.39E-04	4400	5.4617E13
4.29E-04	4410	5.5436E13
8.51E-04	4460	5.9657E13
1.98E-03	4560	6.8758E13
4.53E-03	4660	7.8768E13
1.01E-02	4770	9.0874E13
2.70E-02	4880	1.0417E14
4.73E-02	4990	1.1870E14
6.87E-02	5060	1.2861E14
9.92E-02	5150	1.4213E14
1.42E-01	5270	1.6153E14
2.02E-01	5410	1.8621E14
2.87E-01	5580	2.1922E14
4.13E-01	5790	2.6470E14
5.22E-01	5980	3.1044E14
6.75E-01	6180	3.6334E14
8.14E-01	6340	4.0922E14
1.00E+00	6520	4.6462E14
1.25E+00	6720	5.3086E14
1.61E+00	6980	6.2434E14
2.14E+00	7280	7.4243E14
2.95E+00	7590	8.7574E14
4.13E+00	7900	1.0202E15
5.86E+00	8220	1.1108E15
8.36E+00	8540	1.3525E15
1.20E+01	8860	1.5349E15
1.70E+01	9140	1.7029E15
2.36E+01	9400	1.8657E15



49. A relação entre a temperatura de cada camada de uma atmosfera estelar e a profundidade óptica no caso da atmosfera cinza com a aproximação de Eddington pode ser escrita

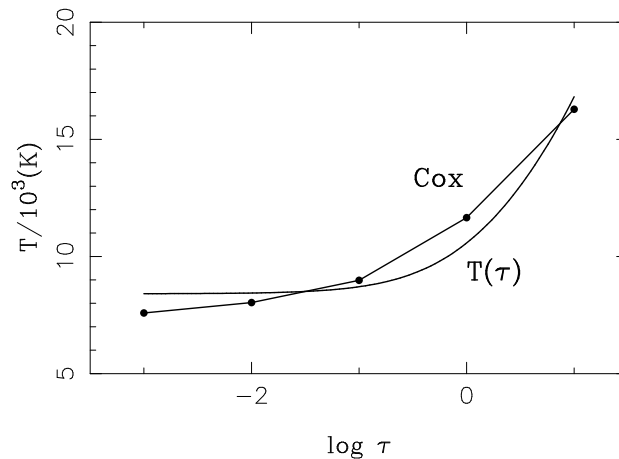
$$T^4 = \frac{3}{4} T_{ef}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right)$$

Compare esta relação com valores mais precisos, obtidos a partir de modelos numéricos para atmosferas estelares. Considere uma estrela A0 V típica, com temperatura efetiva $T_{ef} = 10000$ K e gravidade $\log g = 4$, ou seja, $g = 10^4$ cm/s². A tabela abaixo mostra os resultados de um modelo (Cox 2000, p. 395) para alguns pontos na atmosfera da estrela. Obtenha os resultados correspondentes usando a aproximação acima, e faça um gráfico de T em função de τ incluindo todos os resultados.

τ	$T(K)$
-3.0	7586
-2.0	8030
-1.0	8982
0.0	11655
1.0	16287

Solução

Os resultados estão na figura a seguir. No intervalo considerado, $0.001 < \tau < 10$, a diferença entre os resultados é inferior a 10%.



★ ★ ★

50. O íon H^- tem um potencial de ionização de 0.75 eV. Supondo que o Sol emita radiação como um corpo negro a uma temperatura de 5800 K, que fração do número de fótons emitidos pelo Sol pode ionizar o H^- ?

Solução:

$$N_\nu = \frac{B_\nu}{h \nu} = \frac{2 h \nu^3}{c^2} \frac{1}{h \nu} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{2 \nu^2}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$$f = \frac{\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}}{\int_0^{\infty} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}}$$

fazendo

$$x = \frac{h \nu}{k T} \quad dx = \frac{h d\nu}{k T}$$

$$x_0 = \frac{h \nu_0}{k T} = 1.50 \quad \nu^2 = \left(\frac{k T}{h} \right)^2 x^2$$

obtemos

$$f = \frac{\int_{x_0}^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx}{\int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx}$$

podemos obter uma solução aproximada considerando

$$e^x - 1 \simeq e^x$$

que deve ser uma boa aproximação para a integral no numerador. Obtemos

$$f \simeq \frac{\int_{x_0}^{\infty} x^2 e^{-x} dx}{\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx} = \frac{I_1}{I_2}$$

a integral pode ser resolvida por partes, e o resultado é

$$\int x^2 e^{-x} dx = -e^{-x} (x^2 + 2x + 2)$$

portanto

$$I_1 = \int_{x_0}^{\infty} x^2 e^{-x} dx = e^{-x_0} (x_0^2 + 2x_0 + 2) = 1.62$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = e^{-0} (0 + 0 + 2) = 2$$

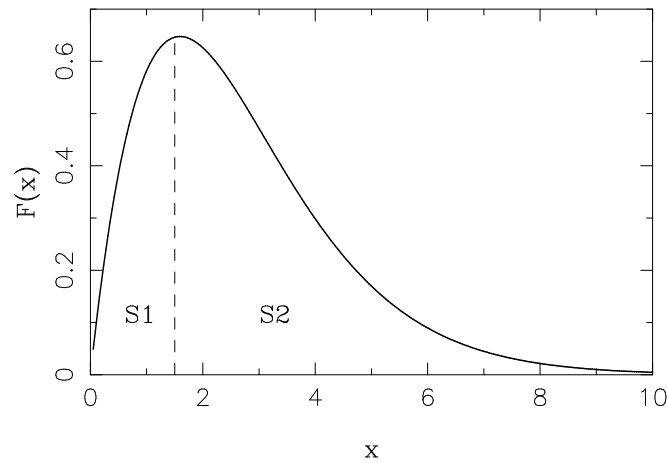
e a fração é

$$f \simeq \frac{I_1}{I_2} \simeq \frac{1.62}{2} \simeq 0.81$$

Este é na realidade um limite superior em vista da aproximação feita acima. para obter uma aproximação melhor, podemos calcular a função

$$F(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} dx$$

e integrar nos limites devidos (ver figura a seguir)



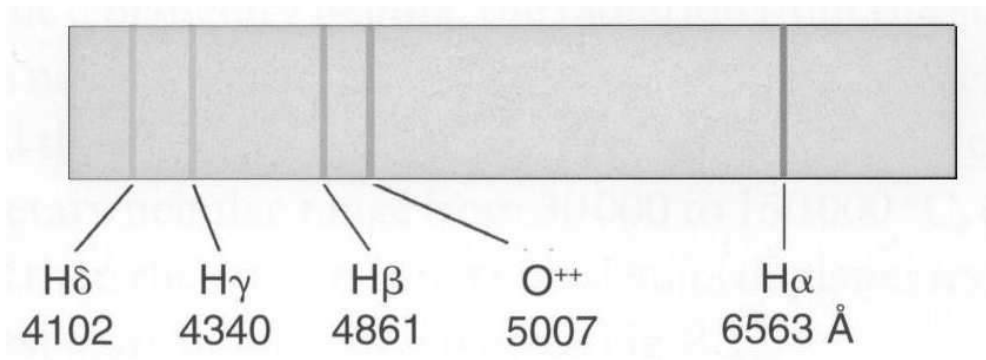
os valores das integrais são

$$S1 = 0.66715, \quad S2 = 1.73568, \quad S1 + S2 = 2.40284$$

$$f = \frac{S_2}{S_1 + S_2} \simeq \frac{1.73568}{2.40284} \simeq 0.72$$

★ ★ ★

51. A linha $H\alpha$ do hidrogênio ($\lambda \simeq 6563 \text{ \AA}$) é uma das linhas espectrais mais brilhantes em muitas estrelas e nebulosas. Mostre que esta linha corresponde à transição entre os níveis caracterizados pelos números quânticos principais $n = 2$ e $n = 3$ do H.



Solução:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_b^2} - \frac{1}{n_a^2} \right) = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right)$$

$$R = \text{constante de Rydberg} = 1.097 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$$

$$\lambda = 6563 \text{ \AA}$$

★ ★ ★

52. Considere a linha $H\alpha$ ($\lambda \simeq 6563 \text{ \AA}$) em absorção na fotosfera solar, com uma temperatura $T = 5800 \text{ K}$. Admitindo alargamento Doppler, determine (a) a largura Doppler $\Delta\nu_D$, (b) a largura total à meia altura FWHM em Hz e $\text{\AA}$; (c) a largura natural desta linha $\Delta\nu_h(N)$ em $\text{\AA}$, considerando $A_{kj} \simeq 1.0 \times 10^8 \text{ Hz}$.

Solução:

(a) Usando $m = m_H = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$, o parâmetro b é

$$b = \left(\frac{2kT}{m_H} \right)^{1/2} \simeq 9.79 \times 10^5 \text{ cm/s} \simeq 9.8 \text{ km/s}$$

a largura Doppler é

$$\Delta\nu_D = b \frac{\nu_{jk}}{c} = \frac{b}{\lambda_{jk}} \simeq 1.49 \times 10^{10} \text{ Hz}$$

(b) A FWHM é

$$\Delta\nu_h(D) = 2 \Delta\nu_D \sqrt{\ln 2} \simeq 2.48 \times 10^{10} \text{ Hz}$$

$$\Delta\lambda_h(D) = \lambda_{jk} \frac{\Delta\nu_h(D)}{\nu_{jk}} = \lambda_{jk}^2 \frac{\Delta\nu_h(D)}{c} \simeq 3.56 \times 10^{-9} \text{ cm} \simeq 0.36 \text{ \AA}$$

(c) A largura natural desta linha pode ser estimada por

$$\Delta\nu_h(N) = \frac{\Gamma_k}{2\pi} \simeq \frac{A_{kj}}{2\pi} = 1.59 \times 10^7 \text{ Hz}$$

medindo esta largura em $\text{\AA}$

$$\Delta\lambda_h(N) = \frac{\lambda_{jk}^2 \Delta\nu_h(N)}{c} \simeq 2.28 \times 10^{-12} \text{ cm} = 2.28 \times 10^{-4} \text{ \AA}$$

ou seja, a largura natural é cerca de 1500 vezes menor que a largura Doppler.

★ ★ ★

53. Mostre que a equação de Saha

$$\frac{n(X^{r+1}) n_e}{n(X^r)} \simeq \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} 2 \frac{g_{r+1,1}}{g_{r,1}} e^{(-\Delta E_r/kT)}$$

pode ser colocada na forma

$$\log \left[\frac{n(X^{r+1}) n_e}{n(X^r)} \right] = 15.38 + \log \left(\frac{2 g_{r+1,1}}{g_{r,1}} \right) + 1.5 \log T - \frac{5040}{T} \Delta E_r$$

onde T está em K, ΔE_r em eV e n em cm^{-3} .

Solução

Tomando os logaritmos

$$\log \left[\frac{n(X^{r+1}) n_e}{n(X^r)} \right] = 1.5 \log \left(\frac{2 \pi m_e k}{h^2} \right) + 1.5 \log T +$$

$$\log \left(\frac{2 g_{r+1,1}}{g_{r,1}} \right) - \frac{\Delta E_r}{k T} \log e$$

$$\log \left[\frac{n(X^{r+1}) n_e}{n(X^r)} \right] = 15.38 + 1.5 \log T + \log \left(\frac{2 g_{r+1,1}}{g_{r,1}} \right) - \frac{\Delta E_r}{k T} \log e$$

o último termo fica

$$\frac{\Delta E_r(\text{erg})}{k T} \log e = \frac{\Delta E_r(\text{eV}) (1.60 \times 10^{-12}) \log e}{(1.38 \times 10^{-16}) T} \simeq \frac{5040}{T} \Delta E_r(\text{eV})$$

portanto

$$\log \left[\frac{n(X^{r+1}) n_e}{n(X^r)} \right] = 15.38 + \log \left(\frac{2 g_{r+1,1}}{g_{r,1}} \right) + 1.5 \log T - \frac{5040}{T} \Delta E_r$$

onde T está em K, ΔE_r em eV e n em cm^{-3} .

★ ★ ★

54. Considere um ponto da fotosfera solar onde a densidade eletrônica é $n_e \simeq 2 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$. Adote os valores 13.6 eV para o potencial de ionização do H, e os pesos estatísticos $g_1 = 2$ (para $r = 1$, ou seja, átomos neutros de H, com densidade n_H) e $g_2 = 1$ (para $r = 2$, ou seja, prótons, com densidade n_p). Obtenha uma expressão para o grau de ionização do H, $x = n_p/n_H$ e faça um gráfico de x em função da temperatura.

Solução

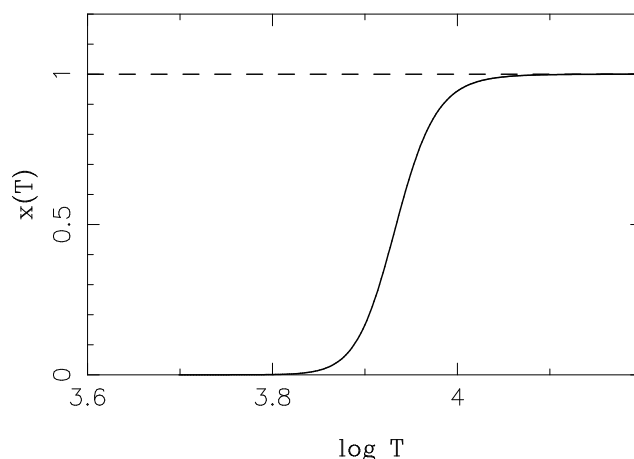
A equação de Saha pode ser escrita

$$\log \left(\frac{n_p n_e}{n_H} \right) \simeq 15.38 + 1.5 \log T - \frac{68544}{T}$$

com T em K e n em cm^{-3} . O grau de ionização do H é

$$x = \frac{n_p}{n_p + n_H} = \frac{(n_p/n_H)}{1 + (n_p/n_H)}$$

Admitindo n_e constante, podemos obter n_p/n_H e o grau de ionização para cada temperatura. Os resultados para temperaturas $4000 < T(\text{K}) < 12000$ estão na figura a seguir. Nas condições adotadas o H está essencialmente neutro para as temperaturas mais baixas, $T \leq 8000 \text{ K}$.



★ ★ ★

55. Admita que a atmosfera de uma estrela está em equilíbrio termodinâmico. Qual seria a energia média dos fótons na atmosfera? Aplique este resultado para a atmosfera solar, admitindo que a temperatura é $T \simeq T_{ef} \simeq 5800$ K.

Solução

A energia média dos fótons $\bar{E}$ pode ser obtida por

$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty E_\nu n_\nu d\nu}{\int_0^\infty n_\nu d\nu}$$

onde $E_\nu = h\nu$ é a energia do fóton de frequência ν e n_ν é a densidade de fótons, ou seja, $n_\nu d\nu$ é o número de fótons por unidade de volume com frequência entre ν e $\nu + d\nu$. Este número pode ser relacionado com a densidade de energia U_ν por

$$n_\nu d\nu = \frac{U_\nu d\nu}{h\nu}$$

a densidade de energia é

$$U_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

portanto

$$n_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^2} \frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

de modo que

$$\bar{E} = \frac{kT \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}}{\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1}} = kT \frac{I_1}{I_2}$$

onde $x = h\nu/kT$. A primeira integral tem um resultado conhecido,

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

a segunda integral é

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \simeq 2 (1 + 1/8 + 1/27 + 1/64 + \dots) \simeq 2.404$$

a energia média é

$$\bar{E} = 2.701 kT$$

para a atmosfera solar $\bar{E} \simeq 2.16 \times 10^{-12} \text{ erg} = 1.35 \text{ eV}$

★ ★ ★

56. Modelos para a fotosfera solar mostram que em uma região onde a temperatura é da ordem de $T \simeq 5800 \text{ K}$, a temperatura varia cerca de $\Delta T \simeq 200 \text{ K}$ em uma distância $\Delta R \simeq 25 \text{ km}$. (a) Em ordens de grandeza, qual seria a escala de altura para as variações de temperatura? (b) Considere a fotosfera solar composta de átomos de H, com uma densidade $n_H \simeq 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. A seção de choque de colisões entre os átomos de H é dada aproximadamente por $\sigma_H \simeq \pi a_0^2 \simeq 10^{-16} \text{ cm}^2$, onde $a_0 \simeq 10^{-8} \text{ cm}$ é o raio da primeira órbita de Bohr. Qual é o caminho livre médio dos átomos de H? A aproximação de ETL é boa neste caso?

Solução

(a) A escala de altura pode ser estimada por

$$h_T \simeq \frac{T}{|dT/dR|} \simeq \frac{5800}{200/25} \simeq 700 \text{ km}$$

(b) O caminho livre médio é, aproximadamente

$$\lambda_H \simeq \frac{1}{n_H \sigma_H} \simeq \frac{1}{(10^{17})(10^{-16})} \simeq 0.1 \text{ cm}$$

como $\lambda_H \ll h_T$, a aproximação de ETL é uma aproximação razoável

★ ★ ★

57. O fluxo observado da estrela AGB rica em carbono TT Cyg em $\lambda = 5 \mu\text{m}$ é de cerca de 20 Jy (Jorgensen et al. 2000), enquanto que a emissão contínua do melhor modelo para esta estrela indica um fluxo de cerca de 60 Jy. Qual é o erro cometido pelo modelo? Qual seria a causa mais provável desta discrepância?

Solução

O erro médio é

$$\frac{\Delta F}{F_o} \simeq \frac{60 - 20}{20} = 2.0$$

ou 200%. A diferença é provavelmente devida a uma banda molecular não considerada no espectro contínuo. Como se trata de uma estrela AGB carbonada, a banda é provavelmente de moléculas de C, especialmente C_3 .

★ ★ ★

58. O Sol tem um raio fotosférico $R_{\odot} = 6.96 \times 10^{10}$ cm e as dimensões de sua fotosfera determinadas a partir de modelos teóricos precisos, são da ordem de $\Delta R \simeq 500$ km. A estrela Betelgeuse (α Ori) tem um raio da ordem de $900 R_{\odot}$, e sua atmosfera é extensa, alcançando uma fração considerável de seu raio. A Terra tem um raio de 6400 km, e a maior parte dos gases atmosféricos está contida dentro de uma altura $\Delta R \simeq 100$ km. Verifique se a hipótese de uma atmosfera plano-paralela é válida nestes casos.

Solução

Sol: $\Delta R/R_{\odot} \simeq 500/700000 \simeq 7 \times 10^{-4}$

$\Delta R \ll R_{\odot}$ a fotosfera solar corresponde a cerca de 0.07% do raio solar. Assim, a hipótese de uma atmosfera plano-paralela é válida.

Betelgeuse: $R \simeq \Delta R$, a hipótese não é válida.

Terra: $\Delta R/R \simeq 100/6400 \simeq 0.016$, a camada atmosférica corresponde a 1.6% do raio, e a hipótese plano-paralela é também razoável.

★ ★ ★

59. A estrela supergigante α Ori (M2Iab) tem uma temperatura efetiva $T_{ef} = 3900$ K e seu raio é $R \simeq 860 R_{\odot}$. (a) Qual é sua luminosidade em erg/s e em W? (b) Quantas vezes esta estrela é mais luminosa do que o Sol?

Solução:

(a) $L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4 = 5.91 \times 10^{38}$ erg/s = 5.91×10^{31} W

(b) $\frac{L}{L_{\odot}} = \frac{5.91 \times 10^{38}}{3.85 \times 10^{33}} = 1.54 \times 10^5 = 154.000$ vezes

★ ★ ★

60. Tomando o valor médio do campo magnético solar como $B \simeq 10^3$ G = 0.1 T, (a) qual é a densidade de energia magnética do Sol? (b) compare este resultado com a densidade de energia gravitacional.

Solução:

(a) A densidade é dada por

$$u_B \simeq \frac{B^2}{8\pi} \simeq 4.0 \times 10^4 \text{ erg/cm}^3$$

(b) A densidade de energia gravitacional pode ser estimada por

$$u_g \simeq \frac{G M_\odot^2}{R_\odot^4} \simeq 1.1 \times 10^{16} \text{ erg/cm}^3$$

portanto

$$\frac{u_B}{u_g} \simeq \frac{B^2 R_\odot^4}{8\pi G M_\odot^2} \simeq 3.5 \times 10^{-12}$$

★ ★ ★

61. Considere uma região na coroa solar onde a intensidade do campo magnético é $B \simeq 10 \text{ G}$, a densidade média do gás é $n \simeq 10^6 \text{ cm}^{-3}$, e a temperatura $T \simeq 2 \times 10^6 \text{ K}$. Mostre que a pressão magnética é muito superior à pressão do gás nesta região.

Solução:

$$P_B \simeq \frac{B^2}{8\pi} \simeq \frac{100}{8\pi} \simeq 4.0 \text{ dina/cm}^2 \simeq 0.4 \text{ N/m}^2 \simeq 0.4 \text{ Pa}$$

$$P_g \simeq n k T \simeq (10^6) (1.38 \times 10^{-16}) (2 \times 10^6)$$

$$P_g \simeq 3.0 \times 10^{-4} \text{ dina/cm}^2 \simeq 3.0 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2$$

$$r \simeq \frac{P_g}{P_B} \simeq \frac{3.0 \times 10^{-4}}{4} \simeq 10^{-4}$$

★ ★ ★

62. Uma estrela Ap tem um campo magnético com intensidade de 10^3 G . Considere uma região na atmosfera desta estrela onde $\rho \simeq 10^{-9} \text{ g/cm}^3$ e $T \simeq 10000 \text{ K}$, e compare a pressão magnética com a pressão do gás nesta região.

Solução:

$$P_B \simeq \frac{B^2}{8\pi} \simeq \frac{10^6}{8\pi} \simeq 4.0 \times 10^4 \text{ dina/cm}^2$$

$$P_g \simeq \frac{k \rho T}{\mu m_H} \simeq \frac{(1.38 \times 10^{-16}) (10^{-9}) (10^4)}{(0.5) (1.67 \times 10^{-24})} \simeq 1.7 \times 10^3 \text{ dina/cm}^2$$

$$\frac{P_B}{P_g} \simeq 24$$

★ ★ ★

63. Uma estrela tem massa, raio e temperatura efetiva dados por $M = 5 M_{\odot}$, $R = 10 R_{\odot}$ e $T_{ef} = 12000$ K. Sua luminosidade está acima ou abaixo do limite de Eddington?

Solução:

$$L = 4 \pi R^2 \sigma T_{ef}^4 = 7.16 \times 10^{36} \text{ erg/s} = 1860 L_{\odot}$$

O limite de Eddington pode ser escrito como

$$L_{Ed} = \frac{4 \pi c G m_H}{\sigma_e}$$

onde $\sigma_e = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^{-2}$ é a seção de choque de espalhamento por elétrons.

temos aproximadamente

$$\frac{L_{Ed}}{L_{\odot}} \simeq 3.3 \times 10^4 \frac{M}{M_{\odot}} \simeq 1.7 \times 10^5$$

portanto

$$L < L_{Ed}$$

★ ★ ★

64. O íon H^- é muito importante na opacidade contínua da fotosfera solar. A opacidade por este íon é também importante na fotosfera de uma estrela quente, com temperatura efetiva da ordem de 10000 K? Considere que a energia de ligação do segundo elétron do íon H^- é de 0.75 eV.

Solução:

Para esta estrela temos

$$\bar{E} \simeq k T \simeq (1.38 \times 10^{-16}) (10^4) \simeq 1.38 \times 10^{-12} \text{ erg} \simeq 0.86 \text{ eV}$$

como $\bar{E} > 0.75 \text{ eV}$, muitos fótons da estrela podem ejetar o segundo elétron, assim a abundância e opacidade de H^- devem ser pequenas.

★ ★ ★

65. O coeficiente de absorção ligado-livre (b-f) máximo do íon H^- (k_{H-}) em uma região da fotosfera solar corresponde aproximadamente ao comprimento de onda $\lambda_{max} \simeq 8500 \text{ \AA}$ e o valor máximo da opacidade é dado por

$$\frac{10^{26} k_{H-}}{P_e n_H} \simeq 3.5 \frac{\text{cm}^4}{\text{dina}}$$

onde $P_e = n_e k T$ é a pressão eletrônica, $n_e \simeq 2 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ é a densidade eletrônica, $n_H \simeq 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ é a densidade de H neutro e $T \simeq 6300 \text{ K}$ é a temperatura. Estime o coeficiente de absorção máximo k_{H-} em cm^{-1} .

Solução:

O coeficiente de absorção ligado-livre (b-f) é

$$k_{H^-} \simeq \frac{(3.5) (2 \times 10^{13}) (1.38 \times 10^{-16}) (6300) (10^{17})}{10^{26}}$$

$$k_{H^-} \simeq 6.1 \times 10^{-8} \text{ cm}^{-1}$$

★ ★ ★

66. (a) Estime o coeficiente de absorção máximo para transição ligado-livre do íon H^- na fotosfera solar, considerando que a seção de choque máxima para esta transição é $\sigma_{H^-} \simeq 4 \times 10^{-17} \text{ cm}^2$. A densidade de átomos neutros de H é $n_H \simeq 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, e existem 4×10^7 átomos de H neutro para cada íon H^- . (b) Compare seu resultado com o valor obtido no exercício anterior.

Solução:

$$(a) \frac{n_H}{n_{H^-}} \simeq 4 \times 10^7$$

$$k'_{H^-} \simeq (\sigma_{H^-}) (n_{H^-}) \simeq \frac{(4 \times 10^{-17}) (10^{17})}{4 \times 10^7} \simeq 1.0 \times 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$$

$$(b) \frac{k'_{H^-}}{k_{H^-}} \simeq \frac{1.0 \times 10^{-7}}{6.1 \times 10^{-8}} \simeq 1.6$$

★ ★ ★

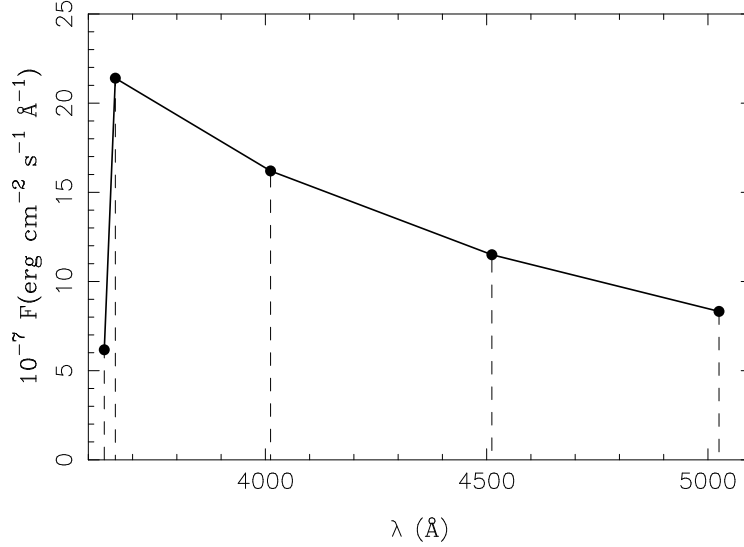
67. A tabela a seguir mostra o fluxo emergente F_λ ($\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$) em diversos comprimentos de onda em uma estrela com temperatura efetiva $T_{ef} = 10000 \text{ K}$ de acordo com modelos de Kurucz (1979, cf. Cox 2000, p. 394). (a) Qual é o fluxo total emergente da estrela? (b) Que fração do fluxo total é emitida entre os comprimentos de onda $\lambda_1 = 3636 \text{ \AA}$ e $\lambda_2 = 5025 \text{ \AA}$?

λ (Å)	$\log F_\lambda$	F_λ	λ (Å)	$\log F_\lambda$	F_λ
506	-6.26	5.50×10^{-7}	5025	7.92	8.32×10^7
890	1.11	1.29×10^1	5525	7.79	6.17×10^7
920	3.73	5.37×10^3	6025	7.68	4.79×10^7
1482	8.28	1.91×10^8	7075	7.46	2.88×10^7
2012	8.12	1.32×10^8	8152	7.26	1.82×10^7
2506	7.98	9.55×10^7	8252	7.33	2.14×10^7
3012	7.89	7.76×10^7	10050	7.03	1.07×10^7
3636	7.79	6.17×10^7	14594	6.47	2.95×10^6
3661	8.33	2.14×10^8	27000	5.48	3.02×10^5
4012	8.21	1.62×10^8	50000	4.45	2.82×10^4
4512	8.06	1.15×10^8	100000	3.27	1.86×10^3

Solução:

(a) $F \simeq \sigma T_{ef}^4 \simeq (5.67 \times 10^{-5}) (10000)^4 = 5.67 \times 10^{11} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

(b) Podemos estimar os fluxos $F1$ entre 3636 e 3661Å, $F2$ entre 3661 e 4012Å, $F3$ entre 4012 e 4512Å, $F4$ entre 4512 e 5025Å por (ver figura abaixo)



$$F1 = \frac{(6.17 + 21.4) (10^7)}{2} (3661 - 3636) = 3.45 \times 10^9 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$F2 = \frac{(21.4 + 16.2) (10^7)}{2} (4012 - 3661) = 6.60 \times 10^{10} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$F3 = \frac{(16.2 + 11.5) (10^7)}{2} (4512 - 4012) = 6.93 \times 10^{10} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$F4 = \frac{(11.5 + 8.32) (10^7)}{2} (5025 - 4512) = 5.08 \times 10^{10} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$F(3636 - 5025) \simeq F1 + F2 + F3 + F4 \simeq 1.90 \times 10^{11} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

a fração é

$$f \simeq \frac{F(3636 - 5025)}{F} \simeq \frac{1.90 \times 10^{11}}{5.67 \times 10^{11}} \simeq 0.335 \rightarrow 33.5\%$$

★ ★ ★

68. Mostre que a média de Rosseland é uma média direta tomada em relação ao fluxo do campo de radiação, isto é

$$k_R = \frac{1}{F} \int_0^\infty k_\nu F_\nu d\nu$$

Solução:

O fluxo monocromático em equilíbrio radiativo pode ser escrito

$$F_\nu = \int I_\nu \cos \theta d\omega = -\frac{4\pi}{3k_\nu} \frac{dB_\nu}{dr}$$

portanto

$$\frac{dB_\nu}{dr} = -\frac{3}{4\pi} k_\nu F_\nu$$

$$\frac{dB}{dr} = -\frac{3}{4\pi} \int_0^\infty k_\nu F_\nu d\nu$$

a média de Rosseland é definida por

$$\frac{1}{k_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k_\nu} \frac{dB_\nu}{dr} d\nu}{\frac{dB}{dr}}$$

portanto

$$k_R = \frac{dB/dr}{\int \left(\frac{1}{k_\nu} \frac{dB_\nu}{dr}\right) d\nu} = \frac{(-3/4\pi) \int k_\nu F_\nu d\nu}{\int (-3/4\pi) F_\nu d\nu}$$

$$k_R = \frac{1}{F} \int_0^\infty k_\nu F_\nu d\nu$$

★ ★ ★

69. Na definição do coeficiente médio de Rosseland, admitimos implicitamente que o coeficiente de emissão j_ν é isotrópico. Quando as emissões induzidas são consideradas, isso não é verdade, pois essas emissões funcionam como absorções ao contrário, colocando fótons preferencialmente na direção da radiação original. Como poderia ser definida a média de Rosseland para levar em conta as emissões induzidas?

Solução:

O coeficiente deve ser definido por

$$\frac{1}{k_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k_\nu (1 - e^{-h\nu/kT})} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}$$

★ ★ ★

70. Na aproximação de Eddington a relação entre a temperatura e a profundidade óptica pode ser escrita como (cf. Exercício 49)

$$T^4 = \frac{3}{4} T_{ef}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right)$$

onde T_{ef} é a temperatura efetiva da estrela. Mostre que a equação de equilíbrio radiativo pode ser obtida a partir da equação acima, com uma definição conveniente da profundidade óptica.

Solução:

A profundidade óptica pode ser definida por

$$d\tau = -k_R dr$$

$$\frac{dT^4}{dr} = \frac{dT^4}{d\tau} \frac{d\tau}{dr} = \left(\frac{3}{4} T_{ef}^4 \right) (-k_R)$$

onde k_R é o coeficiente médio de Rosseland. O fluxo total é

$$F \simeq \sigma T_{ef}^4 = \frac{a c}{4} T_{ef}^4$$

onde

$$a = \frac{4\sigma}{c} = 7.57 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$$

usando estas equações

$$-\frac{3}{4} k_R \frac{4F}{a c} = \frac{dT^4}{dr}$$

$$F = -\frac{a c}{3 k_R} \frac{dT^4}{dr} = -\frac{4 a c}{3 k_R} T^3 \frac{dT}{dr}$$

* * *

71. Mostre que a fronteira entre o domínio de espalhamento puro e o das transições ligado-livre ocorre para

$$\rho \simeq 4.7 \times 10^{-27} \frac{t}{g_{bf} Z} T^{3.5} \text{ g/cm}^3$$

onde Z é a fração por massa de elementos pesados, g_{bf} é um valor médio do fator de Gaunt, e t é o fator de guilhotina, relacionado com o número de elétrons restante no íon considerado.

Solução:

Usando a aproximação de Kramers para as transições ligado-livre temos

$$\kappa_{bf} = 4.3 \times 10^{25} \frac{g_{bf}}{t} Z (1 + X) \frac{\rho}{T^{3.5}}$$

onde X é a fração por massa de H.

O coeficiente de espalhamento por elétrons é

$$\kappa_e = \sigma_e \frac{n_e}{\rho}$$

onde $\sigma_e = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$ é seção de choque de espalhamento de Thomson. Usando o peso molecular por elétron dado por

$$\mu_e = \frac{\rho}{n_e m_H} \simeq \frac{2}{1+X}$$

(ver Exercício 87) obtemos

$$\kappa_e = \frac{\sigma_e}{\mu_e m_H} \simeq \frac{\sigma_e}{m_H} \frac{1+X}{2} \simeq 0.20 (1+X)$$

A fronteira pode ser estimada fazendo $\kappa_{bf} = \kappa_e$, portanto

$$\rho \simeq \frac{0.20}{4.3 \times 10^{25}} \frac{t}{g_{bf} Z} T^{3.5}$$

$$\rho \simeq 4.7 \times 10^{-27} \frac{t}{g_{bf} Z} T^{3.5} \text{ g/cm}^3$$

★ ★ ★

72. Estime o caminho livre médio para espalhamento Thomson em dois pontos no interior do Sol, onde $\rho \simeq 140 \text{ g/cm}^3$ e $\rho \simeq 1.4 \text{ g/cm}^3$, respectivamente. Adote $X = 0.70$. Como esse valor se modifica, se houver outros processos de absorção ou espalhamento?

Solução:

O caminho livre médio é

$$\lambda \simeq \frac{1}{k_e} \simeq \frac{1}{\kappa_e \rho} \simeq \frac{1}{0.20 (1+X) \rho}$$

$$\rho = 140 \text{ g/cm}^3 \longrightarrow \lambda \simeq 0.02 \text{ cm}$$

$$\rho = 1.4 \text{ g/cm}^3 \longrightarrow \lambda \simeq 2.1 \text{ cm}$$

se houver outros processos $\lambda' < \lambda$

★ ★ ★

73. (a) Estime o “tempo de vôo” de um fóton produzido no centro de uma estrela gigante vermelha ($M = 1 M_\odot$, $R = 100 R_\odot$) para atravessá-la totalmente, desprezando as absorções. (b) Estime esse tempo levando em conta as interações (absorções e espalhamentos) no interior da estrela.

Solução:

$$(a) t_a \simeq \frac{R}{c} \simeq \frac{6.96 \times 10^{12}}{3 \times 10^{10}} \simeq 230 \text{ s} \simeq 4 \text{ min}$$

(b) A densidade numérica de partículas pode ser escrita

$$n \simeq \frac{\rho}{\mu m_H} \simeq \frac{3}{4 \pi \mu m_H} \left(\frac{M}{R^3} \right) \simeq 1.7 \times 10^{24} \frac{M/M_\odot}{(R/R_\odot)^3} \simeq 1.7 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$$

onde adotamos $\mu \simeq 0.5$. Tomando um valor típico para a seção de choque $\sigma \simeq 10^{-24} \text{ cm}^2$

$$\lambda_b \simeq \frac{1}{n\sigma} \simeq \frac{1}{(1.7 \times 10^{18})(10^{-24})} \simeq 5.9 \times 10^5 \text{ cm}$$

$$t_b \simeq \frac{N\lambda}{c} \simeq \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 \frac{\lambda}{c} \simeq \frac{R^2}{\lambda c}$$

ou seja, $t_b \simeq 2.7 \times 10^9 \text{ s} \simeq 90 \text{ anos}$

★ ★ ★

74. Na fotosfera solar, a opacidade em $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ é $\kappa_\lambda = 0.3 \text{ cm}^2/\text{g}$, onde κ_λ é o coeficiente de absorção por massa, definido por $\kappa_\lambda = k_\lambda/\rho$, onde $\rho \simeq 2.1 \times 10^{-7} \text{ g/cm}^3$ é a densidade típica da fotosfera. Qual é a distância média percorrida por um fóton com $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ na fotosfera solar?

Solução:

A distância pode ser obtida por

$$d \simeq \frac{1}{k_\lambda} \simeq \frac{1}{\kappa_\lambda \rho} \simeq \frac{1}{(0.3)(2.1 \times 10^{-7})}$$

$$d \simeq 1.59 \times 10^7 \text{ cm} \simeq 160 \text{ km}$$

★ ★ ★

INTERIORES ESTELARES

75. Um ponto típico no interior do Sol, onde $r = R_\odot/2$, tem pressão total $P \simeq 1.3 \times 10^{15} \text{ dina/cm}^2$ e $T \simeq 4.4 \times 10^6 \text{ K}$. Mostre que, nessas condições, a pressão da radiação é muito menor que a pressão do gás.

Solução:

$$P_r = \frac{1}{3} a T^4 = \frac{1}{3} (7.56 \times 10^{-15}) (4.4 \times 10^6)^4 = 9.4 \times 10^{11} \text{ dina/cm}^2$$

como $P \simeq 1.3 \times 10^{15} \text{ dina/cm}^2$, temos

$$P \simeq P_g \quad P_r \ll P_g$$

★ ★ ★

76. Estime a pressão do gás, a pressão da radiação e a pressão total em um ponto no interior de uma estrela da sequência principal de tipo espectral O3. Qual é o termo dominante da pressão?

Solução:

Para uma estrela de tipo espectral O3V temos $M \simeq 120M_{\odot}$ e $R \simeq 15R_{\odot}$ (Maciel 1999, tabela 1.7).

a pressão do gás pode ser estimada por

$$P_g \simeq 3.1 \times 10^{17} \frac{(M/M_{\odot})^2}{(R/R_{\odot})^4} \simeq 8.8 \times 10^{16} \text{ dina/cm}^2$$

para a temperatura temos

$$T \simeq 1.6 \times 10^7 \frac{M/M_{\odot}}{R/R_{\odot}} \simeq 1.3 \times 10^8 \text{ K}$$

portanto

$$P_r \simeq \frac{1}{3} a T^4 \simeq 7.2 \times 10^{17} \text{ dina/cm}^2$$

$$P \simeq P_g + P_r \simeq 8.1 \times 10^{17} \text{ dina/cm}^2$$

a pressão da radiação P_r é dominante

★ ★ ★

77. Considere uma região do interior estelar em uma geometria plano-paralela, de modo que a intensidade específica depende apenas da coordenada polar θ . Suponha que o campo de radiação possa ser expandido em série de Fourier

$$I(\theta) = I_0 + I_1 \cos \theta + \dots$$

onde I_0 é a componente isotrópica e I_1 é uma pequena anisotropia. Qual seria a intensidade média, fluxo, densidade de energia e pressão da radiação neste caso?

Solução

Aplicando a definição da intensidade média obtemos

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\pi (I_0 + I_1 \cos \theta) \sin \theta d\theta = I_0$$

ou seja, a intensidade média depende apenas da componente isotrópica

$$\text{o fluxo é } F = 2\pi \int_0^\pi (I_0 + I_1 \cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{3} I_1$$

ou seja, o fluxo depende apenas da componente anisotrópica I_1

a densidade de energia fica

$$U = \frac{2\pi}{c} \int_0^\pi (I_0 + I_1 \cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{c} I_0$$

e a pressão da radiação pode ser escrita

$$P_r = \frac{2\pi}{c} \int_0^\pi (I_0 + I_1 \cos \theta) \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{3c} I_0$$

nos dois últimos casos obtemos as mesmas expressões válidas para o ET.

★ ★ ★

78. Determine o comportamento da massa $M(r)$ e da pressão $P(r)$ na vizinhança do centro de uma estrela. Use uma expansão em série de Taylor na forma

$$F = F_c + \left(\frac{dF}{dr} \right)_c r + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 F}{dr^2} \right)_c r^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 F}{dr^3} \right)_c r^3 + \dots$$

(cf. Prialnik 2009).

Solução:

Para a massa, usando a equação de continuidade

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$\left(\frac{dM}{dr} \right)_c = 4\pi (r^2 \rho)_c = 0$$

$$\left(\frac{d^2 M}{dr^2} \right)_c = 4\pi \left(2r\rho + r^2 \frac{d\rho}{dr} \right)_c = 0$$

$$\left(\frac{d^3 M}{dr^3} \right)_c = 4\pi \left(2\rho + 2r \frac{d\rho}{dr} + 2r \frac{d\rho}{dr} + r^2 \frac{d^2 \rho}{dr^2} \right)_c = 8\pi \rho_c$$

portanto

$$M(r) = \frac{1}{6} (8\pi \rho_c r^3) = \frac{4}{3} \pi \rho_c r^3$$

para a pressão, podemos usar a equação de equilíbrio hidrostático

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2}$$

$$\left(\frac{dP}{dr} \right)_c = -\left(\frac{GM\rho}{r^2} \right)_c = -\left(\frac{G(4/3)\pi \rho_c r^3 \rho}{r^2} \right)_c = -\left(\frac{4\pi G \rho^2 r}{3} \right)_c = 0$$

$$\left(\frac{d^2 P}{dr^2} \right)_c = -\left(\frac{d\rho}{dr} \frac{GM}{r^2} + \frac{\rho G}{r^2} \frac{dM}{dr} - \frac{2\rho GM}{r^3} \right)_c$$

$$\left(\frac{d^2 P}{dr^2} \right)_c = -\left(\frac{d\rho}{dr} \frac{GM}{r^2} + \frac{\rho G}{r^2} 4\pi r^2 \rho - \frac{2\rho G 4\pi \rho}{3} \right)_c$$

$$\left(\frac{d^2 P}{dr^2} \right)_c = -\left(\frac{d\rho}{dr} \frac{GM}{r^2} + 4\pi G \rho^2 - \frac{8\pi G \rho^2}{3} \right)_c$$

$$\left(\frac{d^2 P}{dr^2}\right)_c = -\left(\frac{12 \pi G \rho_c^2 - 8 \pi G \rho_c^2}{3}\right)_c = -\frac{4 \pi G \rho_c^2}{3}$$

portanto

$$P(r) = P_c - \frac{1}{2} \frac{4 \pi G \rho_c^2}{3} r^2 = P_c - \frac{2}{3} \pi G \rho_c^2 r^2$$

★ ★ ★

79. A energia térmica de uma estrela pode ser escrita

$$E_t = \frac{3}{2} \int_0^M \frac{P(r)}{\rho(r)} dM$$

Mostre que, para uma estrela em equilíbrio hidrostático, esta energia também pode ser escrita

$$E_t = 2 \pi G \int_0^R M(r) \rho(r) r dr$$

Solução:

Da equação de continuidade

$$dM = 4 \pi r^2 \rho dr$$

$$E_t = \frac{3}{2} \int_0^R \frac{P(r)}{\rho(r)} 4 \pi r^2 \rho(r) dr = 6 \pi \int_0^R P(r) r^2 dr$$

integrando por partes com

$$P = u, \quad dP = du$$

$$r^2 dr = dv, \quad v = \frac{r^3}{3}$$

obtemos

$$\int_0^R P(r) r^2 dr = \left[\frac{P(r) r^3}{3} - \int \frac{r^3}{3} dP \right]_0^R$$

$$E_t = 6 \pi \left[\left(\frac{P(r) r^3}{3} \right)_0^R - \int_0^R \left(\frac{r^3}{3} \right) \left(-\frac{G M \rho(r)}{r^2} \right) dr \right]$$

onde usamos a equação de equilíbrio hidrostático. O primeiro termo do segundo membro é nulo, portanto

$$E_t = 2 \pi G \int_0^R M(r) \rho(r) r dr$$

★ ★ ★

80. Em diversas situações astrofísicas temos informações sobre apenas uma componente da velocidade, a velocidade radial. Neste caso, a distribuição maxwelliana de velocidades pode ser escrita

$$f(v_x) dv_x = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp(-mv_x^2/2kT) dv_x$$

onde $f(v_x)dv_x$ é a fração das partículas cuja componente de velocidade na direção x está compreendida no intervalo entre v_x e $v_x + dv_x$, independentemente das outras componentes. (a) Mostre que esta distribuição é normalizada. (b) Mostre que, neste caso que a média rms é

$$\langle v_x^2 \rangle^{1/2} = \left[\frac{\int f(v_x) v_x^2 dv_x}{\int f(v_x) dv_x} \right]^{1/2} = \left(\frac{kT}{m} \right)^{1/2}$$

Solução:

(a) Da distribuição de Maxwell temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v_x) dv_x = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-mv_x^2/2kT) dv_x$$

fazendo

$$\sqrt{\frac{m}{2kT}} v_x = u, \quad \sqrt{\frac{m}{2kT}} dv_x = du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v_x) dv_x = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) du$$

a integral é dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) du = \sqrt{\pi}$$

portanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v_x) dv_x = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}} = 1$$

(b) Da definição da média é necessário provar que

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{\int f(v_x) v_x^2 dv_x}{\int f(v_x) dv_x} = \frac{kT}{m}$$

com a condição de normalização temos que provar que

$$\langle v_x^2 \rangle = \int f(v_x) v_x^2 dv_x = \frac{kT}{m}$$

substituindo a função de distribuição com a mudança de variáveis acima

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{2kT}{\sqrt{\pi}m} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) u^2 du$$

com o valor da integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) u^2 du = \Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

obtemos a média rms procurada

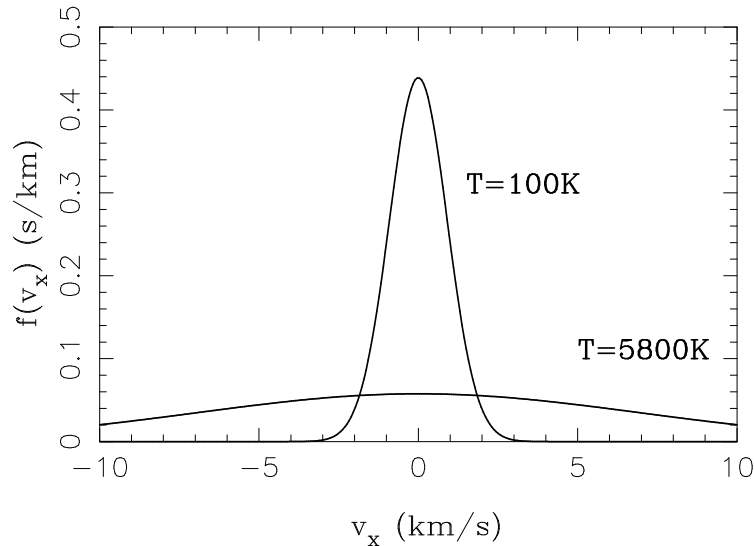
★ ★ ★

81. Considere uma distribuição maxwelliana de uma componente da velocidade considerando (i) uma nuvem interestelar com temperatura típica $T = 100$ K e (ii) a fotosfera solar, com uma temperatura $T = 5800$ K. Admita que em ambos os casos o gás é composto apenas de H atômico e faça um gráfico da função de distribuição $f(v_x)$ em função da velocidade v_x .

Solução:

Usando a expressão (ver exercício anterior)

$$f(v_x) dv_x = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp(-mv_x^2/2kT) dv_x$$



obtemos os resultados mostrados no gráfico. A distribuição é isotrópica, e torna-se mais estreita para temperaturas mais baixas.

★ ★ ★

82. Vamos considerar o caso em que $f(v) dv$ é a distribuição de partículas com $v = |\mathbf{v}|$ entre v e $v + dv$, independentemente da direção do vetor velocidade. Nesse caso a distribuição maxwelliana é

$$f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp(-mv^2/2kT) dv$$

Considere um gás composto de H a uma temperatura $T = 10^4$ K. Estime a fração f dos átomos do gás com velocidades entre 20 km/s e 25 km/s.

Solução:

Podemos obter uma média para a velocidade dada por

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{20 + 25}{2} = 22.5 \text{ km/s}$$

nesse caso obtemos $f(22.5) = 2.5 \times 10^{-7} \text{ s cm}^{-1}$.

Uma vez que a distribuição é normalizada, a fração de átomos entre v_1 e v_2 é

$$f \simeq (v_2 - v_1) f(\bar{v}) \simeq (25 - 20) (10^5) (2.5 \times 10^{-7}) \simeq 0.13 \text{ ou } 13\%$$

alternativamente, podemos obter

$$f(v_1) \simeq 3.78 \times 10^{-7} \text{ s cm}^{-1}, \quad f(v_2) \simeq 1.51 \times 10^{-7} \text{ s cm}^{-1}$$

usando a regra do trapézio

$$f \simeq (v_2 - v_1) \frac{f(v_1) + f(v_2)}{2}$$

$$f \simeq (25 - 20) (10^5) \frac{(3.78 + 1.51) \times 10^{-7}}{2} \simeq 0.13, \text{ ou } 13\%$$

★ ★ ★

83. A partir da função de distribuição de quantidade de movimento de um gás de elétrons que obedece a estatística de Maxwell-Boltzmann, (a) obtenha a distribuição das partículas segundo sua energia cinética; (b) obtenha a energia cinética média das partículas; (c) qual é a energia cinética média por partícula?

Solução:

(a) A distribuição de quantidade de movimento é

$$n(p) dp = n \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi m k T)^{3/2}} e^{-p^2/2mkT}$$

considerando

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$dE = \frac{p dp}{m} = \frac{\sqrt{2mE}}{m} dp = \frac{2^{1/2} E^{1/2} dp}{m^{1/2}}$$

portanto obtemos

$$n(E) dE = n(p) dp = n \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/kT} dE$$

$$(b) \langle E \rangle = \int_0^\infty E n(E) dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}} n k T \int_0^\infty \frac{E^{3/2} e^{-E/kT} dE}{(kT)^{5/2}}$$

$$x = \frac{E}{kT} \quad dx = \frac{dE}{kT}$$

$$\langle E \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} n k T \int_0^\infty x^{3/2} e^{-x} dx$$

usando a função Γ

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1) \Gamma(n-1)$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty x^{3/2} e^{-x} dx = \Gamma(5/2) = (3/2) (1/2) \Gamma(1/2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

portanto

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} n k T$$

$$(c) \frac{\langle E \rangle}{n} = \frac{3}{2} k T$$

★ ★ ★

84. A pressão de um gás perfeito pode ser escrita

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty p v(p) n(p) dp$$

onde $n(p)dp$ é a densidade de partículas com quantidade de movimento entre p e $p + dp$ e $v(p)$ é a velocidade correspondente da partícula. Integre esta expressão no caso de um gás perfeito, não degenerado, não relativístico, monoatômico e sem interações, e mostre que $P = nkT$, onde n é a densidade do gás e T sua temperatura.

Solução:

A relação entre a quantidade de movimento p e a velocidade v é

$$p = m v$$

a distribuição em termos de p pode ser escrita

$$n(p) dp = n \frac{4 \pi p^2 dp}{(2 \pi m k T)^{3/2}} e^{-p^2/2mkT}$$

introduzindo a integral I

$$I = \int_0^\infty \frac{p(p/m)}{3kT} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi m k T)^{3/2}} e^{-p^2/2mkT}$$

$$P = nkT I$$

$$x = \frac{p^2}{2mkT}$$

$$dx = \frac{p dp}{m k T} = \frac{2^{1/2} x^{1/2} dp}{(m k T)^{1/2}}$$

$$I = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^{3/2} e^{-x} dx$$

usando o resultado (ver exercício anterior)

$$\int_0^\infty x^{3/2} e^{-x} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

temos $I = 1$, portanto

$$P = n k T$$

★ ★ ★

85. Se as forças coulombianas entre as partículas forem importantes, as trocas de energia cinética e potencial produzirão um desvio clássico da distribuição dos gases perfeitos. Mostre que isso ocorrerá se $T \ll 10^5 (\rho/\mu)^{1/3}$, em unidades cgs. Isso ocorre no Sol?

Solução:

Neste caso

$$\frac{3}{2} k T \ll \frac{e^2}{r}$$

$$T \ll \frac{2 e^2}{3 k r}$$

a separação entre as partículas pode ser estimada por

$$r \simeq \left(\frac{3}{4 \pi} \right)^{1/3} n^{-1/3}$$

considerando que $n \simeq \rho/\mu m_H$, temos

$$T \ll \left(\frac{2^5 \pi}{3^4 m_H} \right)^{1/3} \frac{e^2}{k} \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{1/3}$$

portanto

$$T \ll 1.5 \times 10^5 \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{1/3}$$

para o Sol, com $T \sim 10^6 - 10^7$ K, $\rho \simeq 1$ g/cm³ e $\mu \simeq 0.5$, a desigualdade não é satisfeita.

★ ★ ★

86. Considere o peso molecular em um gás perfeito totalmente ionizado onde X , Y e Z são as frações por massa de H, He e elementos pesados. Definindo o peso molecular médio por

$$\mu = \frac{\rho}{n m_H}$$

onde ρ é a densidade do gás, n é o número de partículas por unidade de volume e m_H a massa do átomo de H. Obtenha uma expressão para μ em função das abundâncias na forma

$$\mu = \frac{1}{2X + 3Y/4 + Z/2} = \frac{2}{1 + 3X + Y/2}$$

Solução

Para um gás de H puro, completamente ionizado, a massa de H por cm³ é ρX ; o número de núcleos de H por cm³ é $\rho X/m_H$, e o número de partículas livres por cm³ é $2\rho X/m_H$. Para o He e elementos pesados o raciocínio é o mesmo, e obtemos os valores da tabela abaixo.

elemento	massa p/ cm ³	núcleos p/ cm ³	partículas p/ núcleo	partículas p/ cm ³
H	ρX	$\rho X/m_H$	2	$2\rho X/m_H$
He	ρY	$\rho Y/4m_H$	3	$3\rho Y/4m_H$
Z_i, A_i	ρZ	$\rho Z/A_i m_H$	$Z_i + 1$	$(Z_i + 1)\rho Z/A_i m_H$

Para a densidade total n temos, então

$$n = \frac{2\rho X}{m_H} + \frac{3\rho Y}{4m_H} + \frac{\rho Z}{m_H} \left\langle \frac{Z_i + 1}{A_i} \right\rangle$$

onde introduzimos um valor médio para os elementos pesados.

Usando a aproximação $\langle (Z_i + 1)/A_i \rangle \simeq 1/2$, temos

$$n = \frac{\rho}{m_H} \left(2X + \frac{3Y}{4} + \frac{Z}{2} \right)$$

portanto

$$\mu = \frac{1}{2X + 3Y/4 + Z/2} = \frac{2}{1 + 3X + Y/2}$$

onde usamos o fato de que $X + Y + Z = 1$

★ ★ ★

87. Definindo a massa média por elétron livre, ou peso molecular por elétron

$$\mu_e = \frac{\rho}{n_e m_H}$$

mostre que

$$\mu_e \simeq \frac{1}{X + Y/2 + Z/2} = \frac{2}{1 + X}$$

Solução

Com o mesmo raciocínio do exercício anterior, obtemos os resultados da tabela abaixo.

elemento	massa p/ cm ³	núcleos p/ cm ³	elétrons p/ núcleo	n_e
H	ρX	$\rho X/m_H$	1	$\rho X/m_H$
He	ρY	$\rho Y/4m_H$	2	$\rho Y/2m_H$
Z_i, A_i	ρZ	$\rho Z/A_i m_H$	Z_i	$Z_i \rho Z/A_i m_H$

como no caso anterior, podemos fazer uma aproximação com relação aos elementos pesados, obtendo

$$n_e = \frac{\rho X}{m_H} + \frac{\rho Y}{2m_H} + \frac{\rho Z}{m_H} \left\langle \frac{Z_i}{A_i} \right\rangle$$

considerando $\langle Z_i/A_i \rangle \simeq 1/2$, temos

$$n_e = \frac{\rho}{m_H} \left(X + \frac{Y}{2} + \frac{Z}{2} \right)$$

e finalmente

$$\mu_e = \frac{1}{X + Y/2 + Z/2} = \frac{2}{1 + X}$$

★ ★ ★

88. Um gás completamente ionizado contém 1.15×10^{24} partículas por cm^3 . O gás contém apenas H, He e O, na proporção $\text{He}/\text{H} = 0.10$ e $\text{O}/\text{H} = 10^{-4}$ por número de átomos. (a) Qual é a densidade eletrônica n_e do gás? (b) Qual é a densidade total ρ ? (c) Calcule as abundâncias por massa, X , Y , Z . (d) Qual é o peso molecular médio μ ? (e) Qual é o peso molecular por elétron μ_e ?

Solução:

$$(a) \quad n_e = n_H + 2n_{He} + 8n_O$$

$$n = n_H + n_{He} + n_O + n_e = 2n_H + 3n_{He} + 9n_O$$

$$\frac{n}{n_H} = 2 + 3 \times 0.10 + 9 \times 10^{-4} \simeq 2.3$$

$$n_H = 5 \times 10^{23} \text{ cm}^{-3}$$

$$n_{He} = 5 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3},$$

$$n_O = 5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$$

$$n_e = 6 \times 10^{23} \text{ cm}^{-3}$$

$$(b) \quad \rho = n_H m_H + 4n_{He} m_H + 16n_O m_H + n_e m_e = 1.17 \text{ g/cm}^3$$

$$(c) \quad 2n_H = \frac{\text{no. part. livres de H}}{\text{cm}^3} = \frac{2\rho X}{m_H}$$

$$n_H = \frac{\rho X}{m_H} \longrightarrow X = \frac{n_H m_H}{\rho} = 0.71$$

$$3n_{He} = \frac{3\rho Y}{4m_H} \longrightarrow Y = \frac{4n_{He} m_H}{\rho} = 0.29$$

$$9n_O = \frac{9\rho Z}{16m_H} \longrightarrow Z = \frac{16n_O m_H}{\rho} = 0.0011$$

$$(d) \quad \mu = \frac{2}{1 + 3X + (Y/2)} = 0.61$$

$$(e) \quad \mu_e = \frac{2}{1 + X} = 1.17$$

★ ★ ★

89. Escreva as equações de Saha para um gás contendo H e He nas proporções X e Y . Considere que existem 6 tipos de partículas, H^0 , H^+ , He^0 , He^+ , He^{++} e

elétrons. Determine os graus de ionização do H e He para um gás com $P \simeq 10^{10}$ dina/cm² e $T \simeq 10^6$ K.

Solução:

Os graus de ionização são definidos por

$$\begin{aligned} x_{H^0} &= \frac{n_{H^0}}{n_H} & x_{H^+} &= \frac{n_{H^+}}{n_H} \\ x_{He^0} &= \frac{n_{He^0}}{n_{He}} & x_{He^+} &= \frac{n_{He^+}}{n_{He}} & x_{He^{++}} &= \frac{n_{He^{++}}}{n_{He}} \\ n_H &= n_{H^0} + n_{H^+} & n_{He} &= n_{He^0} + n_{He^+} + n_{He^{++}} \\ x_{H^0} + x_{H^+} &= 1 \end{aligned} \quad (1)$$

$$x_{He^0} + x_{He^+} + x_{He^{++}} = 1 \quad (2)$$

E : número de elétrons por átomo

$\chi_{H^0}, \chi_{He^0}, \chi_{He^+}$: potenciais de ionização

$$E = \left[X x_{H^+} + \frac{1}{4} Y (x_{He^+} + 2 x_{He^{++}}) \right] \mu \quad (3)$$

$$\frac{x_{H^+}}{x_{H^0}} = \frac{E+1}{E} K_{H^0} \quad (4)$$

$$\frac{x_{He^+}}{x_{He^0}} = \frac{E+1}{E} K_{He^0} \quad (5)$$

$$\frac{x_{He^{++}}}{x_{He^0}} = \frac{E+1}{E} K_{He^+} \quad (6)$$

u_r : função de partição do estado r

$$K_i^r = \frac{u_{r+1}}{u_r} \frac{2}{P} \frac{(2\pi m_e)^{3/2} (kT)^{5/2}}{h^3} e^{-\chi_i^r/kT} \quad i = H, He \quad (7)$$

(cf. Kippenhahn & Weigert 1994, p. 113).

As equações (1)–(6) envolvem as variáveis x_{H^0} , x_{H^+} , x_{He^0} , x_{He^+} , $x_{He^{++}}$ e E .

K_{H^0} , K_{He^0} e K_{He^+} são dadas por (7), conhecidas as funções de partição

e potenciais de ionização, além de ρ , T , X e Y .

Tomando $P \simeq 10^{10}$ dina/cm², $T \simeq 10^6$ K, $X \simeq 0.70$, $Y \simeq 0.3$, temos

$$x_{H^0} \simeq 0, \quad x_{H^+} \simeq 1, \quad x_{He^0} \simeq 0, \quad x_{He^+} \simeq 0.5 \text{ e } x_{He^{++}} \simeq 0.5$$

90. A condição para que a densidade de energia potencial coulombiana de um gás perfeito seja desprezível com relação à sua energia cinética pode ser escrita como

$$e^3 \left(\frac{\pi}{kT} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho \zeta}{m_H} \right)^{3/2} \ll \frac{3}{2} \frac{k}{\mu m_H} \rho T$$

onde ρ , T , μ são a densidade, temperatura e peso molecular do gás, e é a carga do elétron, k a constante de Boltzmann e ζ é uma função adimensional representativa da composição química do gás. (a) Mostre que esta condição pode ser escrita como

$$T \gg 1.6 \times 10^5 \mu^{2/3} \rho^{1/3} \zeta$$

em unidades cgs. (b) Verifique se esta condição é satisfeita em um gás de He puro com $T \simeq 10^6$ K e $\rho \simeq 10^{-2}$ g/cm³. Considere que para um gás de He puro $\zeta = 3/2$.

Solução:

(a) Da condição dada podemos escrever

$$T \gg \left[\left(\frac{2 m_H}{3 k} \right)^{2/3} e^2 \left(\frac{\pi}{k} \right)^{1/3} \frac{1}{m_H} \right] \mu^{2/3} \rho^{1/3} \zeta$$

calculando a constante acima obtemos a relação procurada.

(b) Nesse caso $\mu = 4/3 = 1.33$. Aplicando a condição

$$10^6 \gg (1.6 \times 10^5) (4/3)^{2/3} (10^{-2})^{1/3} (1.5)$$

$$10^6 \gg 6.3 \times 10^4$$

portanto a condição é satisfeita

★ ★ ★

91. O hélio tem três estágios de ionização: neutro (He^0), uma vez ionizado (He^+) e duas vezes ionizado (He^{++}). Podemos definir as frações de cada estágio por

$$x_0 = \frac{n(\text{He}^0)}{n(\text{He})} \quad x_+ = \frac{n(\text{He}^+)}{n(\text{He})} \quad x_{++} = \frac{n(\text{He}^{++})}{n(\text{He})}$$

onde $n(\text{He}) = n(\text{He}^0) + n(\text{He}^+) + n(\text{He}^{++})$. (a) Obtenha expressões para x_0 , x_+ e x_{++} em função das razões $n(\text{He}^+)/n(\text{He}^0)$ e $n(\text{He}^{++})/n(\text{He}^+)$. (b) Faça um gráfico mostrando as variações de x_0 , x_+ e x_{++} com a temperatura. Considere que a pressão eletrônica é $P_e = n_e k T = 1$ dina/cm². Dados: $g_0 = 1$, $g_+ = 2$, $g_{++} = 1$, $\Delta E_0 = 24.58$ eV e $\Delta E_+ = 54.41$ eV.

Solução

(a) Vamos definir

$$R_{21} = \frac{x_+}{x_o} = \frac{n(\text{He}^+)}{n(\text{He}^o)}$$

$$R_{32} = \frac{x_{++}}{x_+} = \frac{n(\text{He}^{++})}{n(\text{He}^+)}$$

$$R_{31} = \frac{x_{++}}{x_o} = \frac{n(\text{He}^{++})}{n(\text{He}^o)} = R_{32} R_{21}$$

temos então

$$\begin{aligned} x_o &= \frac{n(\text{He}^o)}{n(\text{He}^o) + n(\text{He}^+) + n(\text{He}^{++})} \\ &= \frac{1}{1 + n(\text{He}^+)/n(\text{He}^o) + n(\text{He}^{++})/n(\text{He}^o)} = \frac{1}{1 + R_{21} + R_{32} R_{21}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_+ &= \frac{n(\text{He}^+)}{n(\text{He}^o) + n(\text{He}^+) + n(\text{He}^{++})} \\ &= \frac{1}{1 + n(\text{He}^o)/n(\text{He}^+) + n(\text{He}^{++})/n(\text{He}^+)} = \frac{1}{1 + (1/R_{21}) + R_{32}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{++} &= \frac{n(\text{He}^{++})}{n(\text{He}^o) + n(\text{He}^+) + n(\text{He}^{++})} \\ &= \frac{1}{1 + n(\text{He}^o)/n(\text{He}^{++}) + n(\text{He}^+)/n(\text{He}^{++})} = \frac{1}{1 + [1/(R_{32}R_{21})] + (1/R_{32})} \end{aligned}$$

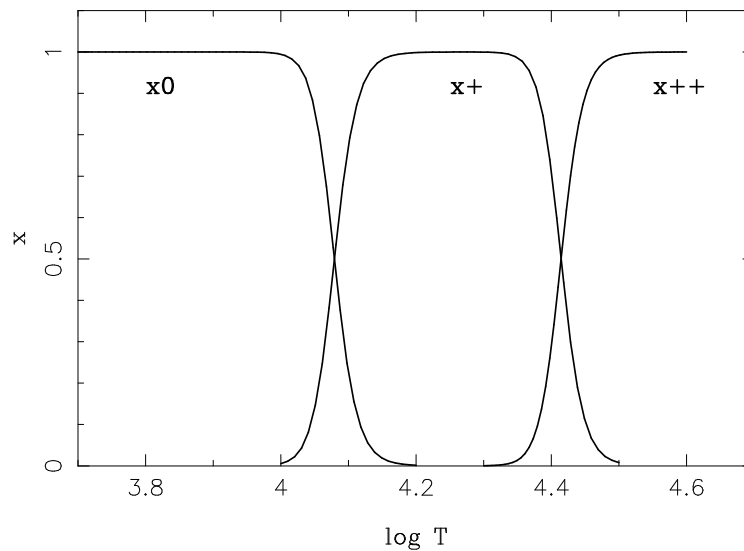
(b) Usando a equação de Saha (ver Exercício 53)

$$\log \frac{n_+}{n_o} = -0.48 + \log 4 + 2.5 \log T - \frac{5040}{T} \quad (24.58)$$

$$\log \frac{n_{++}}{n_+} = -0.48 + 2.5 \log T - \frac{5040}{T} \quad (54.41)$$

Como $n_+/n_o = R_{21}$ e $n_{++}/n_+ = R_{32}$, para cada valor de T os valores de x_o , x_+ e x_{++} podem ser calculados, ver tabela e gráfico a seguir.

$\log T$	x_o	x_+	x_{++}
3.70	1.000	4.51(−16)	5.11(−62)
3.80	1.000	9.73(−11)	3.52(−45)
3.90	1.000	1.89(−06)	1.05(−31)
3.95	1.000	1.25(−04)	5.29(−26)
4.00	0.995	5.39(−03)	6.74(−21)
4.05	0.862	0.138	2.22(−16)
4.10	0.227	0.773	7.51(−13)
4.15	0.018	0.982	2.97(−10)
4.20	1.56(−03)	0.998	5.21(−08)
4.25	1.66(−04)	1.000	5.30(−06)
4.30	2.17(−05)	1.000	3.36(−04)
4.35	3.39(−06)	0.986	0.138
4.40	4.61(−07)	0.714	0.286
4.45	1.53(−08)	0.108	0.892
4.50	2.78(−10)	7.91(−03)	0.992
4.55	6.73(−12)	6.81(−04)	0.999
4.60	2.28(−13)	7.38(−05)	1.000



★ ★ ★

92. Estime em ordem de grandeza a pressão no interior de uma estrela de massa M e raio R , considerando que o peso de uma coluna de 1 cm^2 de seção transversal e altura igual ao raio da estrela é equilibrado pela pressão do gás no interior da estrela. Obtenha valores numéricos para o Sol.

Solução:

Seja ρ a densidade média do interior estelar, $S = 1 \text{ cm}^2$ a área da seção transversal e M_{col} a massa da coluna. Temos

$$M_{col} \simeq \rho S R \simeq \rho R$$

$$P \simeq M_{col} g \simeq \frac{G M (\rho R)}{(R/2)^2}$$

$$P \simeq \frac{4 G M \rho}{R} \simeq \frac{4 G M \left[\frac{M}{(4/3) \pi R^3} \right]}{R} \simeq \frac{3}{\pi} \frac{G M^2}{R^4}$$

Para o Sol $P \simeq 10^{16} \text{ dina/cm}^2$

★ ★ ★

93. Usando argumentos de natureza energética, mostre que os átomos de H no interior do Sol estão ionizados. O que acontece com o He?

Solução:

A temperatura média no interior solar é

$$T(R/2) \simeq 3.4 \times 10^6 \text{ K (cf. Allen 1973, p. 163)}$$

correspondendo à energia cinética

$$E_k \simeq (1/2) k T \simeq 2.3 \times 10^{-10} \text{ erg}$$

o potencial de ionização do H é

$$I_p(\text{H}) = 13.6 \text{ eV} \simeq 2.2 \times 10^{-11} \text{ erg}$$

correspondendo a uma temperatura

$$T \simeq E/k \simeq 1.6 \times 10^5 \text{ K}$$

ou seja $E_k \gg I_p$

para o Helio, ocorre o mesmo, pois

$$I_p(\text{HeI}) = 24.6 \text{ eV} = 3.9 \times 10^{-11} \text{ erg}, \quad T \simeq 2.9 \times 10^5 \text{ K}$$

$$I_p(\text{HeII}) = 54.4 \text{ eV} = 8.7 \times 10^{-11} \text{ erg}, \quad T \simeq 6.3 \times 10^5 \text{ K}$$

★ ★ ★

94. Resultados de um modelo para uma estrela com $15 M_\odot$ e $5 R_\odot$ mostram que $P_c \simeq 5 \times 10^{16} \text{ dina/cm}^2$, $T_c \simeq 3 \times 10^7 \text{ K}$ e $\rho_c \simeq 10 \text{ g/cm}^3$. Considerando que $P_c \propto M^2/R^4$, $T_c \propto M/R$ e $\rho_c \propto M/R^3$, use os dados do modelo solar, onde $P_c \simeq 3.1 \times 10^{17} \text{ dina/cm}^2$, $T_c \simeq 1.6 \times 10^7 \text{ K}$ e $\rho_c \simeq 150 \text{ g/cm}^3$, para estimar P_c , T_c e ρ_c nesta estrela e compare seus resultados com o modelo.

Solução:

$$P'_c \simeq 3.1 \times 10^{17} \frac{(M/M_\odot)^2}{(R/R_\odot)^4} \simeq 1.1 \times 10^{17} \text{ dina/cm}^2$$

$$P'_c/P_c \simeq 2.2$$

$$T'_c \simeq 1.6 \times 10^7 \frac{M/M_\odot}{R/R_\odot} \simeq 4.8 \times 10^7 \text{ K}$$

$$T'_c/T_c \simeq 1.6$$

$$\rho'_c \simeq 150 \frac{M/M_\odot}{(R/R_\odot)^3} \simeq 18 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho'_c/\rho_c \simeq 1.8$$

★ ★ ★

95. Mostre que, em ordem de grandeza, $T \propto M/R$ no interior estelar. Obtenha a expressão abaixo, onde T está em K.

$$T \simeq 10^7 \frac{M/M_\odot}{R/R_\odot}$$

Solução

$$T \propto \frac{P}{\rho} \propto \frac{PR^3}{M}$$

mas

$$\frac{P}{R} \propto \frac{M\rho}{R^2}$$

portanto

$$P \propto \frac{M\rho}{R} \propto \frac{M}{R} \frac{M}{R^3} \propto \frac{M^2}{R^4}$$

com essas duas relações obtemos

$$T \propto P \frac{R^3}{M} \propto \frac{M^2}{R^4} \frac{R^3}{M} \propto \frac{M}{R}$$

usando as equações

$$T \simeq \frac{\mu m_H}{k} \frac{P}{\rho}$$

$$\frac{P}{R} \simeq \frac{G M \rho}{R^2} \quad \frac{P}{\rho} \simeq \frac{G M}{R}$$

$$T \simeq \frac{G \mu m_H}{k} \frac{M}{R} \simeq \frac{G \mu m_H}{k} \frac{M_\odot}{R_\odot} \frac{M/M_\odot}{R/R_\odot}$$

Com $\mu \simeq 0.5$, $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{33}$ g, $R_{\odot} = 6.96 \times 10^{10}$ cm

$$T \simeq 1.2 \times 10^7 \frac{M/M_{\odot}}{R/R_{\odot}}$$

★ ★ ★

96. A quantidade de movimento de Fermi para um gás de elétrons degenerados não relativístico pode ser escrita

$$p_F = \left(\frac{3 h^3}{8 \pi} n_e \right)^{1/3}$$

onde n_e é a densidade eletrônica. Mostre que a equação de estado deste gás pode ser escrita

$$P_e = \frac{3^{2/3} h^2}{20 m_e \pi^{2/3}} n_e^{5/3} = 2.3 \times 10^{-27} n_e^{5/3} \text{ dina/cm}^2$$

onde n_e está em cm^{-3} . Sugestão: use a equação da pressão dada no Exercício 84 e considere $p = m_e v$.

Solução:

Temos que

$$P_e = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} p v(p) n(p) dp$$

a densidade total de elétrons é

$$n_e = \frac{8 \pi}{h^3} p^2$$

$$P_e = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} p \frac{p}{m_e} \frac{8 \pi}{h^3} p^2 dp$$

$$P_e = \frac{8 \pi p_F^5}{15 m_e h^3}$$

usando a equação para p_F dada acima temos

$$P_e = \frac{3^{2/3} h^2}{20 m_e \pi^{2/3}} n_e^{5/3} = 2.3 \times 10^{-27} n_e^{5/3} \text{ dina/cm}^2$$

★ ★ ★

97. No caso de elétrons degenerados relativísticos a pressão e a densidade são dadas por

$$P_e = \frac{\pi m_e^4 c^5}{3 h^3} f(x) \simeq 6 \times 10^{22} f(x) \text{ dina/cm}^2$$

$$n_e = \frac{8\pi m_e^3 c^3}{3h^3} x^3$$

(cf. Clayton 1983) onde usamos:

$$x = \frac{p_F}{m_e c} = \frac{h}{m_e c} \left(\frac{3}{8\pi} n_e \right)^{1/3} \simeq 10^{-10} n_e^{1/3}$$

$$f(x) = x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{1/2} + 3 \ln[x + (1 + x^2)^{1/2}]$$

Mostre que no caso ultra-relativístico, onde $E_p \gg m_e c^2$, a pressão eletrônica é dada por

$$P_e \simeq \frac{3^{1/3} h c}{8 \pi^{1/3}} n_e^{4/3} \simeq 2.4 \times 10^{-17} n_e^{4/3} \text{ dina/cm}^2$$

Solução:

Neste caso, $x \gg 1$ e a função $f(x)$ é

$$f(x) \simeq 2x^4 \simeq \frac{2h^4 3^{4/3}}{m_e^4 c^4 8^{4/3} \pi^{4/3}} n_e^{4/3}$$

portanto a pressão fica

$$P_e \simeq \frac{3^{1/3} h c}{8 \pi^{1/3}} n_e^{4/3} \simeq 2.4 \times 10^{-17} n_e^{4/3} \text{ dina/cm}^2$$

★ ★ ★

98. Considere o exercício anterior e mostre que, para $p_F \ll m_e c^2$, isto é, para $x \ll 1$, temos $f(x) = (8/5)x^5$. Utilize essa expressão e reobtenha a relação $P_e(n_e)$ válida para um gás de elétrons degenerados não relativísticos.

Solução:

$$f(x) = x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{1/2} + 3 \sinh^{-1} x$$

$$(x^2 + 1)^{1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \dots \quad (x^2 < 1)$$

$$\sinh^{-1} x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 - \frac{15}{336}x^7 + \dots \quad (|x| < 1)$$

(cf. Abramovitz & Stegun 1965, p. 15, 88)

$$f(x) = (2x^3 - 3x) \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \dots \right) + 3 \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{15}{336}x^7 + \dots \right)$$

considerando só os termos em x^n , com $n \leq 7$

$$f(x) = \left(1 + \frac{3}{8} + \frac{9}{40}\right) x^5 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{45}{336}\right) x^7$$

$$f(x) = \frac{8}{5} x^5 - \frac{4}{7} x^7 \simeq \frac{8}{5} x^5$$

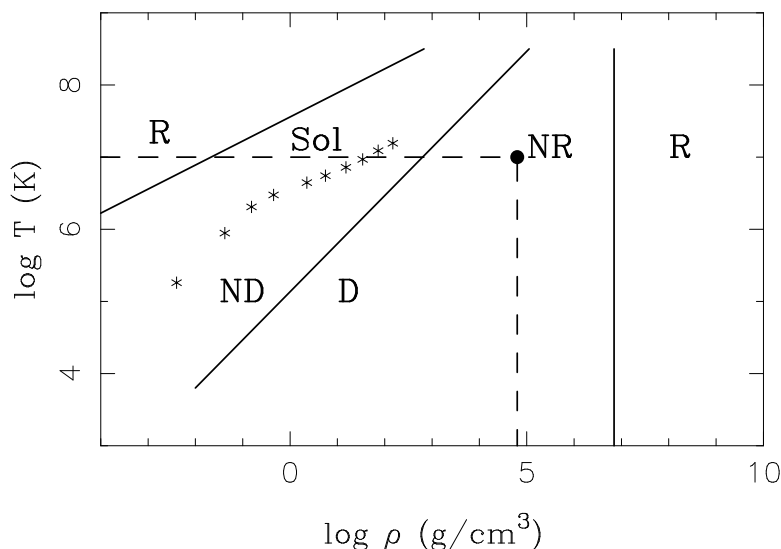
$$P_e = \frac{\pi m_e^4 c^5}{3 h^3} \frac{8}{5} \frac{h^5}{m_e^5 c^5} \frac{3^{5/3}}{2^5 \pi^{5/3}} n_e^{5/3} = \frac{3^{2/3} h^2}{20 m_e \pi^{2/3}} n_e^{5/3}$$

★ ★ ★

99. O interior de uma estrela está a uma temperatura de 10^7 K e pressão de 10^{21} dina/cm². Essas condições ajustam-se melhor a um gás não degenerado, a um gás degenerado não relativístico, ou a um gás degenerado relativístico?

Solução:

A figura abaixo (Maciel 1999) mostra esquematicamente um diagrama $\rho \times T$ indicando a delimitação das regiões não degenerada (ND), degenerada (D), não relativística (NR) e relativística (R).



Para um gás não degenerado

$$P \simeq \frac{k \rho T}{\mu m_H}$$

$$\rho \simeq \frac{P m_H}{k T} \sim 10^6 \text{ g/cm}^3, \quad \log \rho \sim 6$$

para um gás degenerado não relativístico

$$P \simeq 2 \times 10^{-27} n_e^{5/3} \longrightarrow n_e \simeq 4 \times 10^{28} \text{ cm}^{-3}$$

$$\rho \simeq 7 \times 10^4 \text{ g/cm}^3, \quad \log \rho \sim 4.8$$

para um gás degenerado relativístico

$$P \simeq 2.4 \times 10^{-17} n_e^{4/3} \longrightarrow n_e \simeq 2 \times 10^{28} \text{ cm}^{-3}$$

$$\rho \simeq 3 \times 10^4 \text{ g/cm}^3, \quad \log \rho \sim 4.4$$

pela figura o gás é degenerado e não relativístico.

★ ★ ★

100. Mostre que a energia produzida por grama de matéria pela conversão de H em He corresponde aproximadamente a 70% do total das reações nucleares de fusão nas estrelas semelhantes ao Sol. Considere que essas reações processam-se até o ^{56}Fe , e que na conversão de H em He a energia liberada por grama é $E/g = 6.4 \times 10^{18} \text{ erg/g}$.

Solução:

H $\rightarrow$ He

Energia liberada por g

$$\frac{\Delta E}{g} = 6.4 \times 10^{18} \text{ erg/g}$$

H $\rightarrow$ Fe

$$Z = 2, A = 4 \rightarrow Z = 26, A = 56, A - Z = N = 30$$

$$m(\text{Fe}) = 55.8470 \text{ u} \quad (u = 1.66 \times 10^{-24} \text{ g})$$

$$14 \text{ m}(\text{He}) = 14 \times 4.0026 = 56.0364 \text{ u}$$

$$\Delta E = (56.0364 - 55.8470) (1.66 \times 10^{-24}) (3 \times 10^{10})^2 = 2.83 \times 10^{-4} \text{ erg}$$

$$\frac{\Delta E}{g} = \frac{2.83 \times 10^{-4}}{14 \times 4 \times 1.66 \times 10^{-24}} = 3.0 \times 10^{18} \text{ erg/g}$$

$$\left(\frac{\Delta E}{g} \right)_{\text{total}} = 6.4 \times 10^{18} + 3.0 \times 10^{18} = 9.4 \times 10^{18} \text{ erg/g}$$

portanto, de H $\rightarrow$ He

$$f = \frac{6.4 \times 100}{9.4} \simeq 68\%$$

★ ★ ★

101. Mostre que, se toda a massa do Sol for convertida em He, a energia liberada seria suficiente para manter a luminosidade atual do Sol por um tempo $t \sim 10^{11}$ ano.

Solução:

Na transformação de 4 prótons em um núcleo de He temos

$$\Delta m c^2 = 26.6 \text{ MeV} = 4.26 \times 10^{-5} \text{ erg}$$

portanto, a energia liberada com $1 M_{\odot}$ é

$$\Delta E \simeq \frac{(4.26 \times 10^{-5}) (1.99 \times 10^{33})}{(4) (1.0078) (1.66 \times 10^{-24})} = 1.27 \times 10^{52} \text{ erg}$$

$$t \simeq \frac{\Delta E}{L_{\odot}} \simeq \frac{1.27 \times 10^{52}}{(3.85 \times 10^{33}) (3.16 \times 10^7)} \simeq 1.0 \times 10^{11} \text{ anos}$$

★ ★ ★

102. Usando apenas ordens de grandeza, mostre que a taxa de produção de energia das estrelas da sequência principal pode ser colocada na forma $\epsilon \propto T^n$. Estime o valor do expoente n .

Solução:

Podemos escrever

$$\epsilon \propto \frac{L}{M} \quad (1)$$

adotando uma relação aproximada entre a massa e a luminosidade

$$L \propto M^{\alpha} \quad (2)$$

mas

$$T \propto \frac{M}{R} \quad (3)$$

$$M \propto R^3 \quad (4)$$

usando (1), (2), (3)

$$\epsilon \propto M^{\alpha-1} \propto T^{\alpha-1} R^{\alpha-1} \quad (5)$$

usando (3), (4)

$$T \propto R^2 \longrightarrow R \propto T^{1/2} \quad (6)$$

usando (5), (6)

$$\epsilon \propto T^{\alpha-1} T^{(\alpha-1)/2} \propto T^{3(\alpha-1)/2}$$

por exemplo, se $\alpha = 3$, $n = 3$

★ ★ ★

103. A taxa de produção de energia nuclear do Sol pela cadeia pp é aproximadamente $\epsilon \simeq 10^3 \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$. Supondo que esta energia seja produzida em uma

região no interior do Sol com raio $R \simeq 0.1 R_{\odot}$ e densidade média $\rho \simeq 100 \text{ g/cm}^3$,
 (a) qual é a taxa de produção de energia nuclear por unidade de massa ($\text{erg g}^{-1} \text{ s}^{-1}$)? (b) Qual é a luminosidade produzida por este processo?

Solução:

$$(a) \epsilon' \simeq \frac{\epsilon}{\rho} \simeq \frac{10^3}{100} \simeq 10 \text{ erg g}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

$$L \simeq \frac{4}{3} \pi R^3 \epsilon \simeq \frac{4}{3} (3.14) (0.1)^3 (6.96 \times 10^{10})^3 (10^3) \simeq 1.4 \times 10^{33} \text{ erg/s}$$

★ ★ ★

104. Compare os valores da densidade de energia integrada U no interior de estrelas de tipo espectral M da sequência principal e do ramo das gigantes.

Solução:

Para uma estrela da sequência principal

$$T \simeq 1.6 \times 10^7 \frac{M/M_{\odot}}{R/R_{\odot}}$$

considerando uma estrela com tipo espectral M0V

$$M \simeq 0.5 M_{\odot}, R \simeq 0.6 R_{\odot}, \text{ temos } T \simeq 1.3 \times 10^7 \text{ K}$$

$$U(\text{M0V}) \simeq a T^4 \simeq 2.2 \times 10^{14} \text{ erg/cm}^3$$

para uma gigante a equação acima dá um limite inferior

para queima de He devemos ter $T \simeq 10^8 \text{ K}$

considerando uma estrela com tipo espectral M0III

$$M \simeq 1.2 M_{\odot}, R \simeq 40 R_{\odot}$$

$$U(\text{M0III}) \simeq 7.6 \times 10^{17} \text{ erg/cm}^3$$

★ ★ ★

105. Determine a temperatura aproximada em que as taxas de produção de energia pela cadeia pp e pelo ciclo CNO são iguais.

Solução:

As taxas podem ser escritas como (cf. Maciel 1999, capítulo 12)

$$\epsilon_{pp} \simeq 2.4 \times 10^6 f_{pp} \psi g_{pp} X^2 \rho T_6^{-2/3} e^{-33.8/T_6^{1/3}}$$

$$\epsilon_C \simeq 8.7 \times 10^{27} f_C g_C X X_N \rho T_6^{-2/3} e^{-152.3/T_6^{1/3}}$$

onde X , X_N são as abundâncias de H e N por massa, respectivamente,

T_6 é temperatura em unidades de 10^6 K, f_{pp} , ψ , g_{pp} , f_C e g_C são fatores da ordem da unidade.

tomando $\epsilon_{pp} \simeq \epsilon_C$

$$2.4 \times 10^6 X^2 \rho T_6^{-2/3} e^{-33.8/T_6^{1/3}} \simeq 8.7 \times 10^{27} X X_N \rho T_6^{-2/3} e^{-152.3/T_6^{1/3}}$$

adotando $X_N \sim 10^{-3} X$, obtemos

$$T_6 \sim 21.3, \quad T \sim 2.1 \times 10^7 \text{ K}$$

★ ★ ★

106. Admita que a produção de energia em uma estrela com $T \simeq 4 \times 10^7$ K e $\rho \simeq 100 \text{ g/cm}^3$ é feita pelo ciclo CNO. (a) Estime a taxa ϵ_C considerando $X \simeq 0.7$ e $X_N \simeq 10^{-3} X$. (b) A partir do valor obtido em (a), estime a taxa r_C de reações por esse processo.

Solução:

(a) Usando a relação para ϵ_C do exercício anterior

$$\epsilon_C \simeq 1.66 \times 10^6 \text{ erg/g s}, \quad \log \epsilon_C \simeq 6.22$$

(b) A taxa r_C pode ser estimada de

$$\epsilon_C = \frac{r_C \Delta E}{\rho}$$

onde ΔE é a energia liberada pela reação

$$\Delta E \simeq 4 \times 10^{-5} \text{ erg}$$

obtemos

$$r_C \simeq \frac{\rho \epsilon_C}{\Delta E} \simeq \frac{10^2 \times 1.66 \times 10^6}{4 \times 10^{-5}} \simeq 4 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$$

★ ★ ★

107. A taxa de produção de energia pelo processo triplo- α pode ser escrita

$$\epsilon_{3\alpha} \simeq 5.1 \times 10^{11} f_{3\alpha} Y^3 \rho^2 T_8^{-3} e^{-44.0/T_8}$$

(Maciel 1999, capítulo 12), onde Y é a abundância de He por massa, ρ é a densidade do gás, T_8 é a temperatura em unidades de 10^8 K, e $f_{3\alpha}$ é o fator de blindagem. Uma expressão aproximada para esta taxa pode ser escrita

$$\epsilon_{3\alpha} \simeq K Y^3 \rho^2 f_{3\alpha} T_8^{40}$$

Determine a constante K de modo a obter a mesma taxa pelas duas equações em $T \simeq 10^8$ K.

Solução:

Considerando as duas relações

$$K Y^3 \rho^2 f_{3\alpha} T_8^{40} \simeq 5.1 \times 10^{11} Y^3 f_{3\alpha} \rho^2 T_8^{-3} e^{-44/T_8}$$

obtemos

$$K \simeq 5.1 \times 10^{11} T_8^{-43} e^{-44/T_8} \simeq 4 \times 10^{-8}$$

★ ★ ★

108. O fluxo total de neutrinos solares detectado na Terra pelo processo de quebra de deutério, é $f(\nu) \simeq 5.09 \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$, compreendendo neutrinos dos tipos ν_e , ν_μ e ν_τ . O fluxo detectado pelo processo de absorção de neutrinos, sensível apenas aos neutrinos de elétrons ν_e , é $f(\nu_e) \simeq 1.75 \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. (a) Supondo que os fluxos de neutrinos dos tipos ν_μ e ν_τ sejam iguais, qual seria o valor do fluxo de cada um desses tipos? (b) Considere que o raio do Sol é $R_\odot = 6.96 \times 10^{10} \text{ cm}$ e que a distância média entre a Terra e o Sol é $d_T = 1.5 \times 10^{13} \text{ cm}$. Qual deve ser o fluxo total de neutrinos na superfície do Sol?

Solução:

$$(a) f_\mu = f_\tau = \frac{1}{2} [f(\nu) - f_e] = \frac{1}{2} (5.09 - 1.75) \times 10^6 = 1.67 \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$(b) F(\nu) = f(\nu) \left(\frac{d_T}{R_\odot} \right)^2 = 2.36 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

★ ★ ★

109. No experimento da mina Homestake para detecção dos neutrinos solares, é utilizado um tanque contendo 610 toneladas de C_2Cl_4 . (a) Considerando que 24% do cloro está na forma ^{37}Cl , o restante sendo ^{35}Cl , quantos núcleos-alvo estão disponíveis para as reações nucleares? (b) Suponha que a taxa de captura seja de 1 SNU. Em média, quanto tempo seria necessário esperar para ocorrer uma captura?

Solução:

$$(a) M = 610 \text{ T} = 6.1 \times 10^8 \text{ g}$$

$$M = M_C + M_{Cl}$$

$$\simeq N_C (12 m_H) + N_{37} (37 m_H) + N_{35} (35 m_H)$$

$$\simeq \frac{N_{Cl}}{2} (12 m_H) + 0.24 N_{Cl} (37 m_H) + 0.76 N_{Cl} (35 m_H)$$

$$\simeq (6 + 0.24 \times 37 + 0.76 \times 35) N_{Cl} m_H \simeq 41.5 N_{Cl} m_H$$

$$N_{Cl} \simeq \frac{6.1 \times 10^8}{41.5 m_H} \sim 8.8 \times 10^{30}$$

$$N_{37} \simeq 0.24 N_{Cl} \simeq 2.1 \times 10^{30}$$

(b) O número de capturas por segundo é

$$R_\nu \simeq 10^{-36} N_{37} \times 1 \simeq 2.1 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

$$t \simeq \frac{1}{R_\nu} \simeq 5.5 \text{ dias}$$

★ ★ ★

110. Estime a taxa de captura de neutrinos solares produzidos pela reação



considerando que o fluxo esperado é $F_\nu \simeq 5 \times 10^9 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Considere uma seção eficaz média $\sigma_\nu \simeq 2 \times 10^{-46} \text{ cm}^2$.

Solução:

A taxa de captura pode ser escrita

$$R_\nu \simeq F_\nu \sigma_\nu N$$

onde σ_ν é a seção eficaz de captura média e N é o número de núcleos-alvo.

No sistema cgs R_ν é dada em s^{-1} . Temos então

$$R_\nu(\text{s}^{-1}) \simeq (5 \times 10^9) (2 \times 10^{-46}) N \simeq 1.0 \times 10^{-36} N$$

$$R_\nu(\text{SNU}) \simeq \frac{10^{36} R_\nu(\text{s}^{-1})}{N} \simeq 1.0 \text{ SNU}$$

★ ★ ★

111. Mostre que a energia de Gamow pode ser escrita

$$E_G = (2 \pi \alpha Z_1 Z_2)^2 \frac{1}{2} \mu c^2$$

onde Z_1, Z_2 são os pesos atômicos das partículas 1 e 2, μ é sua massa reduzida e $\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137$ é a constante de estrutura fina.

Solução:

A energia de Gamow é dada por (cf. Maciel 1999, capítulo 11)

$$E_G = \frac{8 \pi^4 m_H e^4}{h^2} \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} Z_1^2 Z_2^2$$

considerando que a massa reduzida é

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} m_H$$

obtemos

$$E_G = \frac{8 \pi^4 m_H e^4}{h^2} \frac{\mu}{m_H} Z_1^2 Z_2^2$$

$$E_G = \frac{(4 \pi^2) (2 \pi^2) e^4}{h^2 c^2} Z_1^2 Z_2^2 \mu c^2$$

e finalmente

$$E_G = (2 \pi \alpha Z_1 Z_2)^2 \frac{1}{2} \mu c^2$$

★ ★ ★

112. Definindo o parâmetro de Sommerfeld $\eta = Z_1 Z_2 e^2 / \hbar v$, onde $v = (2E/\mu)^{1/2}$ é a velocidade relativa das partículas de cargas Z_1, Z_2 , mostre que o fator-S astrofísico pode ser escrito:

$$S(E) = \sigma(E) E e^{2\pi\eta}$$

Solução:

A variação da seção de choque de colisão $\sigma(E)$ com a energia e o fator exponencial devido à barreira coulombiana pode se escrita

$$\sigma(E) \simeq \frac{S(E)}{E} e^{-b/\sqrt{E}}$$

onde E é a energia das partículas em seu centro de massa e b um fator que depende dos núcleos em questão, tal que $b = E_G^{1/2}$, onde E_G é a energia de Gamow (ver o exercício anterior). Temos então

$$S = \sigma E e^{b/\sqrt{E}}$$

o fator b é

$$b = \frac{2 \sqrt{2} \pi^2 \sqrt{m_H} e^2}{h} \left(\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \right)^{1/2} Z_1 Z_2$$

mas

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 = \frac{1}{2} m_H v^2 \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}$$

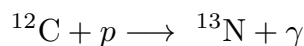
portanto

$$\frac{b}{\sqrt{E}} = 2 \pi \frac{2 \pi e^2 Z_1 Z_2}{h v} = 2 \pi \eta$$

$$S = \sigma E e^{2\pi\eta}$$

★ ★ ★

113. Determine a posição do máximo do pico de Gamow para a reação



com $T \simeq 3 \times 10^7$ K.

Solução:

A taxa de reações ou o número de reações por centímetro cúbico e por segundo pode ser escrita

$$r = K \int e^{-[(E/kT) + (E_G/E)^{1/2}]} dE$$

onde K é uma constante, de modo que

$$\frac{d}{dE} \left[\frac{E}{kT} + \left(\frac{E_G}{E} \right)^{1/2} \right] = \frac{1}{kT} - \frac{1}{2} E_G^{1/2} E^{-3/2} = 0$$

$$E_0 = E_G^{1/3} \left(\frac{kT}{2} \right)^{2/3}$$

do Exercício 111 temos

$$E_G \simeq 1.57 \times 10^{-6} \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} Z_1^2 Z_2^2 \text{ erg}$$

$$E_G \simeq 5.22 \times 10^{-5} \text{ erg} \simeq 32600 \text{ keV}$$

portanto

$$E_0 \simeq 6.07 \times 10^{-8} \text{ erg} \simeq 37.9 \text{ keV}$$

★ ★ ★

114. Um movimento convectivo é caracterizado pela velocidade v e densidade ρ . Mostre que a “pressão convectiva” é dada por $P \sim (1/2) \rho v^2$.

Solução:

Vamos considerar um cubo elementar de lado L , área A e volume $V = A L$.

Se o cubo estiver se deslocando com velocidade v , a energia cinética por unidade de massa é $(1/2) v^2$ e a energia cinética por unidade de volume é $(1/2) \rho v^2$. O trabalho realizado ao deslocar a superfície A pela distância L é

$$\tau \simeq F \times L \simeq P \times A \times L \simeq P \times V$$

onde F é a força exercida e P a pressão sobre as faces do cubo como $\tau \simeq (1/2) \rho v^2 V$, temos $P \simeq (1/2) \rho v^2$.

★ ★ ★

115. Uma região no interior de uma estrela de $2.5 M_{\odot}$ tem $T \simeq 1.5 \times 10^7$ K e $P \simeq 6.4 \times 10^{16}$ dina/cm². Um modelo para essa estrela obtém um gradiente $dT/dP \simeq 3.0 \times 10^{-10}$ K/(dina/cm²). Esta região é convectiva ou radiativa?

Solução:

Para haver convecção

$$dT/dP > \nabla_{ad}$$

o gradiente adiabático é

$$\nabla_{ad} \simeq \frac{2}{5} \frac{T}{P} \simeq 9.4 \times 10^{-11} \text{ K/(dina/cm}^2\text{)}$$

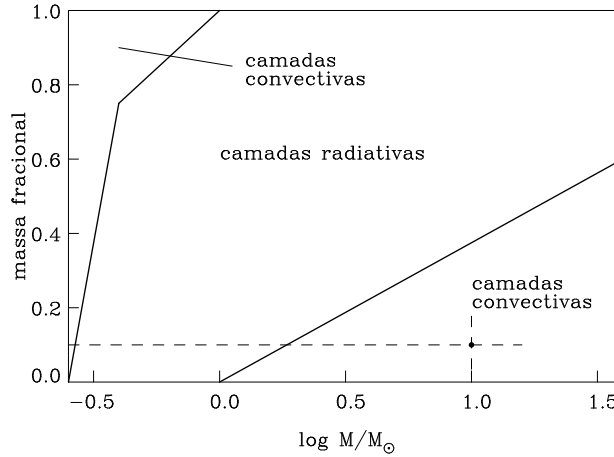
portanto $dT/dP > \nabla_{ad}$, a região é convectiva.

★ ★ ★

116. Considere uma região no interior de uma estrela de 10 massas solares, onde cerca de 10% da massa da estrela está contida. Esta região seria dominada pelo transporte radiativo ou convectivo?

Solução:

As regiões de transporte radiativo e convectivo estão delineadas de maneira aproximada na figura a seguir (Maciel 1999, capítulo 10). Neste caso, o transporte é convectivo.



★ ★ ★

117. A razão entre a diferença dos gradientes de temperatura do gás e adiabático com relação ao gradiente do gás pode ser escrita

$$\xi = \frac{\left| \frac{dT}{dr} - \left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad} \right|}{\left| \frac{dT}{dr} \right|} \quad (1)$$

e de maneira aproximada temos para o interior solar

$$\xi \simeq 3.4 \times 10^{-7} \left(\frac{F_c}{F} \right)^{2/3} \frac{\left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{5/3} \left(\frac{L}{L_\odot} \right)^{2/3}}{\left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{5/3}} \quad (2)$$

onde F_c é o fluxo convectivo e F o fluxo total. Qual é o valor de ξ no caso do interior do Sol, admitindo que todo o fluxo é convectivo? Como este resultado pode ser interpretado?

Solução:

(a) Neste caso, para o interior solar $F_c/F \simeq 1$ e $\xi \simeq 3.4 \times 10^{-7}$. Como $\xi \ll 1$, mesmo se a convecção transportar toda a energia ($F = F_c$), a diferença entre os gradientes é insignificante. Assim, o gradiente real dT/dr é essencialmente igual ao adiabático $(dT/dr)_{ad}$.

★ ★ ★

118. Mostre que haverá convecção se a luminosidade radiativa ultrapassar o limite

$$L > \frac{16 \pi a c G}{3 \kappa_R} \frac{T^4 M(r)}{P} \left(1 - \frac{1}{\Gamma_2} \right)$$

onde κ_R é o coeficiente de Rosseland e Γ_2 o expoente adiabático de Chandrasekhar.

Solução:

Para haver convecção devemos ter

$$\frac{dT}{dP} > \frac{T}{P} \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2}$$

usando a equação de equilíbrio hidrostático obtemos

$$\left| \frac{dT}{dr} \right| > \frac{G \mu m_H}{k} \frac{\beta M(r)}{r^2} \left(1 - \frac{1}{\Gamma_2} \right)$$

onde $\beta = P_g/P$.

o gradiente de temperatura em equilíbrio radiativo pode ser escrito

$$\left| \frac{dT}{dr} \right| = \frac{3}{4 a c} \frac{\kappa_R \rho}{T^3} \frac{L}{4 \pi r^2}$$

usando estas equações obtemos

$$L > \frac{16 \pi a c G}{3 \kappa_R} \frac{T^4 M(r)}{P} \left(1 - \frac{1}{\Gamma_2} \right)$$

★ ★ ★

119. Mostre que, para elétrons com energia cinética E , o fluxo condutivo pode ser escrito

$$F_{cond} \simeq -\frac{1}{6} n_e \bar{v} \Lambda \frac{dE}{dr}$$

onde $\bar{v}$ é a velocidade média e Λ o caminho livre médio dos elétrons.

Solução:

O fluxo condutivo pode ser escrito de maneira aproximada (Maciel 1999, capítulo 9)

$$F_{cond} \simeq -\sqrt{\frac{3 k^3}{16 m_e}} n_e \Lambda T^{1/2} \frac{dT}{dr}$$

com

$$\bar{v} \simeq \sqrt{\frac{3 k T}{m_e}}$$

$$E = (1/2) m_e \bar{v}^2$$

obtemos

$$\frac{dE}{dr} = m_e \bar{v} \frac{d\bar{v}}{dr} = m_e \bar{v} \sqrt{\frac{3 k}{m_e}} \left(\frac{1}{2} T^{-1/2} \frac{dT}{dr} \right)$$

$$\bar{v} \frac{dE}{dr} \simeq 6 \sqrt{\frac{3 k^3}{16 m_e}} T^{1/2} \frac{dT}{dr}$$

explicitando dT/dr e substituindo na equação acima encontramos

$$F_{cond} \simeq -\frac{1}{6} n_e \bar{v} \Lambda \frac{dE}{dr}$$

★ ★ ★

120. Mostre que a transição entre o domínio da opacidade $b-f$ e a opacidade condutiva ocorre para

$$T \simeq 2 \times 10^5 \rho^{1/2}$$

onde T está em K e ρ em g/cm³. Adote uma composição solar.

Solução:

Usando o coeficiente de Kramers para as transições (ver Exercício 71)

$$\kappa_{bf} \simeq 4.3 \times 10^{25} \frac{g_{bf}}{t} Z(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}}$$

a opacidade condutiva pode ser escrita (Maciel 1999, capítulo 9)

$$\kappa_{cond} = \frac{2^7 \pi a c e^4 m_e^{1/2}}{(3 k)^{7/2}} \frac{T^{1/2}}{\rho} \simeq 10^2 \frac{T^{1/2}}{\rho} \text{ cm}^2/\text{g}$$

fazendo

$$\kappa_{bf} \simeq \kappa_{cond}$$

adotando valores típicos

$$g_{bf} \simeq 1, \quad t \simeq 10, \quad Z \simeq 0.02, \quad X \simeq 0.7$$

obtemos

$$T \simeq 2 \times 10^5 \rho^{1/2}$$

★ ★ ★

121. Estime a opacidade radiativa e condutiva para um ponto no interior de uma estrela onde $T \sim 10^7$ K e $\rho \sim 10^6$ g/cm³. Qual dos dois processos domina a opacidade total?

Solução:

Usando os resultados do exercício anterior temos

$$\kappa_{cond} \simeq 0.32 \text{ cm}^2/\text{g}$$

$$\kappa_{rad} \simeq \kappa_{bf} \simeq 5 \times 10^4 \text{ cm}^2/\text{g}$$

$$\kappa_{rad} \gg \kappa_{cond}$$

$$\frac{1}{\kappa_{tot}} = \frac{1}{\kappa_{rad}} + \frac{1}{\kappa_{cond}} \simeq \frac{1}{\kappa_{cond}}$$

$\kappa_{tot} \simeq \kappa_{cond}$ e a condução domina.

★ ★ ★

122. Mostre que a relação

$$y = 1 - \frac{x^2}{6} + n \frac{x^4}{120} - \dots$$

é solução da equação de Lane-Emden para $n = 0$ e $n = 1$. Mostre ainda que essa expressão satisfaz as condições de contorno: para $x \rightarrow 0$, $y = 1$, $y' = 0$.

Solução:

A equação de Lane-Emden pode ser escrita

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + y^n = 0$$

temos então

$$y' = -\frac{x}{3} + \frac{nx^3}{30} - \dots$$

$$y'' = -\frac{1}{3} + \frac{nx^2}{10} - \dots$$

$$\underline{n = 0}$$

$$y = 1 - \frac{x^2}{6}$$

$$y' = -\frac{x}{3}$$

$$y'' = -\frac{1}{3}$$

portanto

$$-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1 = 0$$

aplicando as condições de contorno

$$x \rightarrow 0, \quad y = 1, \quad y' = 0$$

$$\underline{n = 1}$$

$$y = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots$$

$$y' = -\frac{x}{3} + \frac{x^3}{30} - \dots$$

$$y'' = -\frac{1}{3} + \frac{x^2}{10} + \dots$$

$$\left(-\frac{1}{3} + \frac{x^2}{10} - \dots\right) + \left(-\frac{2}{3} + \frac{x^2}{15} - \dots\right) + \left(1 - \frac{x^2}{6} + \dots\right) =$$

$$\left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1\right) + \left(\frac{x^2}{10} + \frac{x^2}{15} - \frac{x^2}{6}\right) + \dots = 0$$

aplicando as condições de contorno

$$x \rightarrow 0, \quad y = 1, \quad y' = 0$$

★ ★ ★

123. Mostre que a relação

$$y = \frac{A \operatorname{sen} x}{x} + \frac{B \cos x}{x}$$

é solução da equação de Lane-Emden com $n = 1$, e mostre que $A = 1$ e $B = 0$.

Solução:

$$y' = \frac{A x \cos x - A \operatorname{sen} x - B x \operatorname{sen} x - B \cos x}{x^2}$$

$$y'' = \frac{-A x \operatorname{sen} x - A \cos x}{x^2} - \frac{A x^2 \cos x - 2 A x \operatorname{sen} x}{x^4} - \frac{B x \cos x - B \operatorname{sen} x}{x^2} - \frac{-B x^2 \operatorname{sen} x - 2 B x \cos x}{x^4}$$

Substituindo y, y', y'' , a equação de Lane-Emden é satisfeita.

Aplicando as condições de contorno

para $x \rightarrow 0, y' \rightarrow 1, y'' \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{A \operatorname{sen} x}{x} + \frac{B \cos x}{x} \right] &= A \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} + B \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} \\ &= A + B \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = A + B \quad m = 1 \quad (m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

portanto $A = 1, B = 0$

★ ★ ★

124. Mostre que a relação

$$y = \left(1 + \frac{1}{3} x^2 \right)^{-1/2}$$

é solução da equação de Lane-Emden para $n = 5$.

Solução:

A equação de Lane-Emden é

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y^5 = 0$$

com a solução proposta

$$y = \left(1 + \frac{x^2}{3} \right)^{-1/2}$$

$$y' = \left(-\frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{x^2}{3} \right)^{-3/2} \left(\frac{2x}{3} \right) = -\frac{xy^3}{3}$$

$$y'' = \left(-\frac{x}{3} \right) (3 y^2 y') - \frac{y^3}{3} = -x y^2 y' - \frac{y^3}{3} = \frac{x^2 y^5}{3} - \frac{y^3}{3}$$

substituindo

$$\frac{x^2 y^5}{3} - \frac{y^3}{3} - \frac{2 y^3}{3} + y^5 = y^5 \left(1 + \frac{x^2}{3} \right) - y^3 = \frac{y^5}{y^2} - y^3 = 0$$

★ ★ ★

125. A pressão central em uma estrela de massa M e raio R aplicada a um politropo de índice n é dada por

$$P_c = \frac{1}{4\pi(n+1)y'(R)^2} \frac{GM^2}{R^4} = k_n \frac{GM^2}{R^4}$$

(a) Determine a constante k_n para $n = 0$ usando os resultados do Exercício 122. (b) Determine esta constante para os politropos com $n = 0, 1, 2, 3$ usando os resultados da tabela abaixo.

n	$x(R)$	$-x(R)^2 y'(R)$	k_n
0.0	2.4494	4.8988	0.119
1.0	3.1416	3.1416	0.393
2.0	4.3529	2.4111	1.638
3.0	6.8969	2.0182	11.051

Solução:

(a) O resultado do Exercício 122 para $n = 0$ é

$$y = 1 - \frac{x^2}{6}$$

$$y' = -\frac{x}{3}$$

para estrelas politrópicas temos

$$y \rightarrow 0, x = x(R)$$

$$\text{portanto } 0 = 1 - \frac{x(R)^2}{6}$$

$$x(R) = \sqrt{6}$$

$$y'(R) = -\frac{x(R)}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

a constante k_0 fica

$$k_0 = \frac{1}{4\pi(0+1)(-\sqrt{6}/3)^2} = \frac{3}{8\pi} \simeq 0.119$$

(b) Os resultados estão incluídos na última coluna da tabela

★ ★ ★

126. (a) Aplique a solução de um politropo de $n = 3$ ao Sol, e obtenha os valores centrais de densidade, pressão e temperatura. (b) Um modelo para o interior do Sol produz os resultados a seguir, onde r está em unidades de 10^{10} cm e P em 10^{16} dina/cm². Compare esse modelo com seus resultados.

r	P
0.00	30.5470
0.07	30.2590
0.15	29.2000
0.42	22.8900
0.63	16.6350
0.84	11.8740
1.16	6.7633
1.41	4.2491
1.71	2.3515
1.96	1.4573
2.21	0.8747
2.58	0.4103
3.15	0.1333
4.25	0.0178
5.08	0.0041

Solução:

(a) Para um politropo de índice $n = 3$ podemos escrever

$$P = K\rho^{4/3} \quad (1)$$

do exercício anterior $x(R) = 6.8969$ e $y'(R) = -0.0424$

a variável x está relacionada com o raio R por

$$R = ax(R) \longrightarrow a = 1.01 \times 10^{10} \text{ cm}$$

a densidade média $\bar{\rho}$ é dada por

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \bar{\rho} \longrightarrow \bar{\rho} = 1.41 \text{ g/cm}^3$$

a densidade central pode ser obtida por

$$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = -\frac{1}{3} \frac{x(R)}{y'(R)} \longrightarrow \rho_c = 47.7 \text{ g/cm}^3$$

a constante K é dada por

$$K = \frac{4\pi G \rho_c^{2/3} a^2}{4} = 7.05 \times 10^{14} \text{ dina cm}^2 \text{ g}^{-4/3}$$

a pressão central pode ser obtida pela relação (1) (alternativamente pela equação do exercício anterior)

$$P_c = 1.22 \times 10^{17} \text{ dina/cm}^2$$

a temperatura é dada pela equação de estado com $\mu \simeq 0.5$

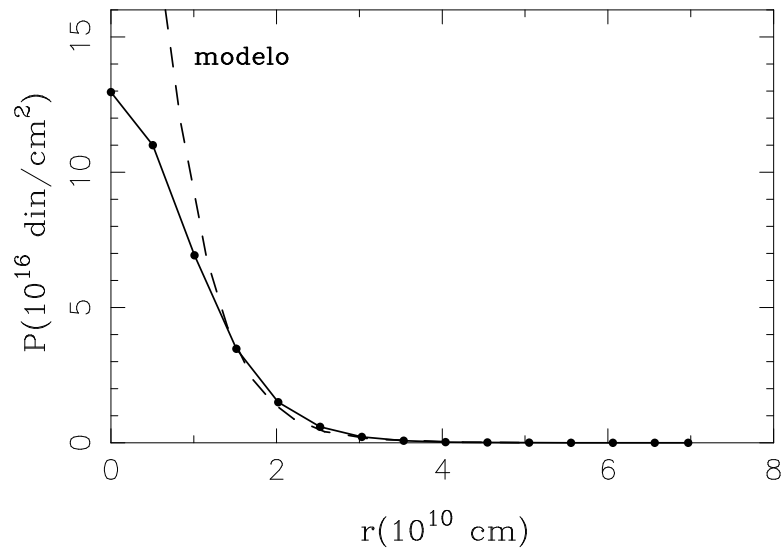
$$T_c = \frac{\mu m_H P_c}{k \rho_c} = 1.55 \times 10^7 \text{ K}$$

(b) A variação $P(r)$ pode se obtida pela relação (1) considerando que a posição r e a densidade ρ da estrela estão relacionadas com as variáveis adimensionais x e y por

$$r = a x, \rho = \rho_c y^3$$

(ver tabela abaixo). O resultado está na figura a seguir

x	y_3	y'_3
0.0	1.0000	0.0000
0.5	0.9598	-0.1548
1.0	0.8551	-0.2521
1.5	0.7195	-0.2799
2.0	0.5829	-0.2615
2.5	0.4611	-0.2240
3.0	0.3592	-0.1840
3.5	0.2763	-0.1488
4.0	0.2093	-0.1202
4.5	0.1551	-0.0976
5.0	0.1108	-0.0801
5.5	0.0743	-0.0666
6.0	0.0437	-0.0560
6.5	0.0179	-0.0478
6.897	0.0000	-0.0424



★ ★ ★

FORMAÇÃO E EVOLUÇÃO ESTELAR

127. A luminosidade atual do Sol é $L_{\odot} \simeq 3.85 \times 10^{33}$ erg/s e sua idade é de 4.5 bilhões de anos. Supondo que sua luminosidade, ao chegar à sequência principal de idade zero, era $L_i \simeq 2.7 \times 10^{33}$ erg/s, (a) qual foi, em magnitudes, o aumento do brilho do Sol nesse período? (b) Qual é a taxa média de aumento do brilho do Sol a cada 10^9 anos?

Solução:

$$(a) \Delta m = -2.5 \log \frac{L_i}{L_{\odot}} \simeq -2.5 \log \frac{2.7}{3.85} \simeq 0.39$$

$$(b) \frac{\Delta m}{t} \simeq \frac{0.39}{4.5} \simeq 0.09 \text{ mag}/10^9 \text{ anos}$$

★ ★ ★

128. Uma estrela com $30 M_{\odot}$ chega à sequência principal com $\log(L/L_{\odot}) \simeq 5.0$ e $\log T_{ef} \simeq 4.6$, aproximadamente. (a) Qual é o valor do raio dessa estrela? (b) Compare o resultado obtido com o raio de uma estrela supergigante vermelha de mesma luminosidade com $T_{ef} \simeq 3500$ K.

Solução:

$$(a) R_a \simeq \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma T_{ef}^4}} \simeq 4.6 \times 10^{11} \text{ cm} \simeq 6.7 R_{\odot}$$

$$(b) \text{ Para uma supergigante com } \log(L/L_{\odot}) \simeq 5.0 \text{ e } T_{ef} \simeq 3500 \text{ K o raio é } \\ R_b \simeq 6.0 \times 10^{13} \text{ cm} \simeq 860 R_{\odot}$$

★ ★ ★

129. Estime a duração da fase na sequência principal para uma estrela com $5 M_{\odot}$. Admita uma relação entre a massa e a luminosidade da forma $L \propto M^n$ com $3 < n < 4$.

Solução:

Podemos escrever aproximadamente

$$t_{SP} \simeq 10^{10} \frac{M/M_{\odot}}{L/L_{\odot}}$$

$$t_{SP} \simeq (10^{10}) (5) (5^{-n}) \simeq (5^{1-n}) (10^{10}) \text{ anos}$$

$$n = 3, t_{SP} \simeq 4 \times 10^8 \text{ anos}$$

$$n = 4, t_{SP} \simeq 8 \times 10^7 \text{ anos}$$

★ ★ ★

130. Uma estrela T Tauri tem $L \simeq 10 L_{\odot}$ e $T_{ef} \simeq 4000$ K. (a) Qual é o valor do raio dessa estrela, em unidades solares? (b) Suponha que a estrela pertence a um estágio pré-sequência principal de uma estrela de $1 M_{\odot}$. Qual deve ser o valor da massa da estrela T Tauri, considerando que esse estágio dura aproximadamente 10^6 anos nos quais a taxa de perda de massa é de $5 \times 10^{-7} M_{\odot}/\text{ano}$?

Solução:

$$(a) R \simeq \left[\frac{L}{4 \pi \sigma T_{ef}^4} \right]^{1/2} \simeq 4.6 \times 10^{11} \text{ cm} \simeq 6.6 R_{\odot}$$

$$(b) M_{TT} \simeq M_{\odot} + \Delta M \simeq M_{\odot} + \dot{M} \Delta t$$

$$M_{TT} \simeq 1.0 + (5 \times 10^{-7}) (10^6) \simeq 1.0 + 0.5 \simeq 1.5 M_{\odot}$$

★ ★ ★

131. Uma variável cefeida tem período de 10 dias e temperatura efetiva de 6000 K. (a) Use a relação período-densidade e determine a densidade média da estrela. (b) Use uma relação período-luminosidade do tipo $L/L_{\odot} \simeq 370 P$, onde o período é dado em dias, e determine a luminosidade e o raio da estrela. (c) Com os resultados anteriores, estime a massa da estrela.

Solução:

(a) A relação período-densidade pode ser escrita

$$P \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{\odot}}} \simeq Q$$

onde $Q \simeq 0.05$ dias é a constante de pulsação média das cefeidas.

A densidade média é

$$\bar{\rho} \simeq \frac{Q^2}{P^2} \bar{\rho}_{\odot} \simeq 3.5 \times 10^{-5} \text{ g/cm}^3$$

com $\bar{\rho}_{\odot} \simeq 1.41 \text{ g/cm}^3$.

(b) $L/L_{\odot} \simeq 370 P \simeq 3700$

$$R \simeq \left[\frac{L}{4 \pi \sigma T_{ef}^4} \right]^{1/2} \simeq 3.9 \times 10^{12} \text{ cm} \simeq 56 R_{\odot}$$

$$(c) M \simeq \frac{4}{3} \pi R^3 \bar{\rho} \simeq 8.7 \times 10^{33} \text{ g} \simeq 4.4 M_{\odot}$$

★ ★ ★

132. A anã branca Sirius B faz parte de um sistema binário, o que permite determinar sua massa, $M = 1.05 M_{\odot}$, e seu raio, $R = 0.0074 R_{\odot}$. Considerando que a

massa limite das anãs brancas é dada pelo limite de Chandrasekhar, $M_C \leq 1.4 M_\odot$, qual é o valor do raio limite dessas estrelas? Sugestão: admita uma relação entre a massa e o raio das estrelas da forma $R = aM + b$.

Solução:

$$\frac{R}{R_\odot} \simeq a \frac{M}{M_\odot} + b$$

$$\text{para } M/M_\odot \simeq 1.4, \quad R/R_\odot \simeq 0$$

$$\text{para } M/M_\odot \simeq 1.05, \quad R/R_\odot \simeq 0.0074$$

$$a \simeq -0.0211, \quad b \simeq 0.0296$$

$$R_{lim} \simeq \lim_{M \rightarrow 0} R \simeq b \simeq 0.03 R_\odot$$

★ ★ ★

133. O ponto de virada (*turnoff*) do aglomerado M67 tem índice de cor em $(B - V)_0 \simeq 0.6$. (a) Estime a massa e a luminosidade das estrelas correspondentes a esse ponto. Sugestão: use as tabelas 1.6 e 1.7 de Maciel (1999) ou equivalente. (b) Estime o tempo que a estrela permanece na sequência principal, que é essencialmente a idade do aglomerado. Admita que a escala de tempo na sequência principal é proporcional à razão M/L e calibre esta relação usando o Sol. (c) Repita o cálculo da letra (b) usando uma expressão mais correta para a escala de tempo, dada por

$$\log t \text{ (ano)} = 10.0 - 3.6 \log M/M_\odot + (\log M/M_\odot)^2$$

Solução:

(a) Para $(B - V)_0 \simeq 0.6$ as tabelas 1.6 e 1.7 indicam

$$0.18 \geq \log L/L_\odot \geq 0.04, \quad 1.5 \geq L/L_\odot \geq 1.1$$

$$1.1 \geq M/M_\odot \geq 0.9$$

(b) Considerando $t_{SP} \propto M/L$ temos

$$t \simeq 10^{10} \frac{M/M_\odot}{L/L_\odot}$$

de modo que

$$1 \times 10^{10} \geq t(\text{ano}) \geq 6 \times 10^9$$

(c) Aplicando a relação dada obtemos

$$1.5 \times 10^{10} \geq t'(\text{ano}) \geq 7 \times 10^9$$

★ ★ ★

134. Considere uma nuvem molecular esférica com densidade média ρ , temperatura T e massa M . Usando apenas relações de proporcionalidade, mostre que a nuvem poderá se condensar se

$$M > M_J \propto T^{3/2} \rho^{-1/2}$$

Solução:

Para haver colapso da nuvem

$$\frac{G M m}{R} > \frac{m v^2}{2}$$

$$M > v^2 R$$

$$\text{mas } v^2 \propto T, \rho \propto \frac{M}{R^3}$$

$$M > T \left(\frac{M}{\rho} \right)^{1/3}$$

$$M^{2/3} > T \rho^{-1/3}$$

$$M > M_J \propto T^{3/2} \rho^{-1/2}$$

★ ★ ★

135. Considere uma nuvem esférica com massa M , raio R , densidade ρ , temperatura T e peso molecular μ . Mostre que a massa mínima para que esta nuvem se condense para formar estrelas pode ser escrita na forma

$$M > M_J \simeq K \frac{T^{3/2}}{\mu^{3/2} \rho^{1/2}}$$

que é a massa de Jeans. Determine o valor da constante K .

Solução:

Para haver colapso

$$|E_p| > E_c$$

onde E_c é a energia cinética térmica do gás e E_p a energia potencial.

Temos aproximadamente

$$\frac{G M^2}{R} > N k T \simeq \frac{M}{\mu m_H} k T$$

mas

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad \longrightarrow \quad R = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$$

portanto a condição fica

$$G M \left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{1/3} > \frac{kT}{\mu m_H}$$

$$M^{2/3} > \frac{3^{1/3} k}{G m_H (4\pi)^{1/3}} \frac{T}{M \rho^{1/3}}$$

$$M > M_J = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{k}{G m_H}\right)^{3/2} T^{3/2} \mu^{-3/2} \rho^{-1/2}$$

que é da forma

$$M_J \simeq K \frac{T^{3/2}}{\mu^{3/2} \rho^{1/2}}$$

onde

$$\begin{aligned} K &= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{k}{G m_H}\right)^{3/2} \simeq 2.13 \times 10^{22} \text{ g}^{3/2} \text{ cm}^{-3/2} \text{ K}^{-3/2} \\ &= 1.07 \times 10^{-11} M_\odot \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{-3/2} \text{ K}^{-3/2} \end{aligned}$$

★ ★ ★

136. A massa de Jeans é frequentemente aproximada pela relação

$$M_J \simeq \left(\frac{2kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2} \left(\frac{1}{4\rho}\right)^{1/2}$$

mas uma expressão mais correta é

$$M_J \simeq \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}$$

Em ambos os casos temos $M_J \propto T^{3/2} \mu^{-3/2} \rho^{-1/2}$, ou $M_J = K T^{3/2} \mu^{-3/2} \rho^{-1/2}$, onde K é uma constante e M_J é dada em $M_\odot$, T em K e ρ em g/cm^3 . Determine a constante nos dois casos.

Solução:

$$K_1 = \left[\frac{(2)(1.38 \times 10^{-16})}{(6.67 \times 10^{-8})(1.67 \times 10^{-24})} \right]^{3/2} \left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} \frac{1}{1.99 \times 10^{33}}$$

$$K_1 = 3.10 \times 10^{-11} M_\odot \text{ K}^{-3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{-3/2}$$

$$K_2 = \left[\frac{(5) (1.38 \times 10^{-16})}{(6.67 \times 10^{-8}) (1.67 \times 10^{-24})} \right]^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{1.99 \times 10^{33}}$$

$$K_2 = 1.20 \times 10^{-10} M_{\odot} \text{K}^{-3/2} \text{g}^{1/2} \text{cm}^{-3/2}$$

★ ★ ★

137. Chamando R_J o raio da esfera de massa M_J , conhecido como Raio de Jeans. Mostre que

$$R_J = K_3 \left(\frac{T}{\mu \rho} \right)^{1/2} \quad (1)$$

$$R_J = K_4 \frac{v_s}{\rho^{1/2}} \quad (2)$$

onde v_s é a velocidade do som no meio. Determine as constantes K_3 e K_4 .

Solução:

Considerando o exercício anterior adotando $K = K_2$, temos

$$M_J \simeq \frac{4}{3} \pi R_J^3 \rho = K_2 \frac{T^{3/2}}{\mu^{3/2} \rho^{1/2}}$$

desta relação obtemos

$$R_J^3 = \frac{3 K_2}{4 \pi} \left(\frac{T}{\mu \rho} \right)^{3/2}$$

ou seja

$$R_J = K_3 \left(\frac{T}{\mu \rho} \right)^{1/2}$$

que é da forma da equação (1) onde

$$K_3 = \left(\frac{3 K_2}{4 \pi} \right)^{1/3}$$

considerando o valor de K_2 do exercício anterior temos

$$K_3 = \left(\frac{5 k}{G m_H} \right)^{1/2} \left(\frac{3}{4 \pi} \right)^{1/2} = \left(\frac{15 k}{4 \pi G m_H} \right)^{1/2} \quad (3)$$

para unidades cgs, $K_3 = 3.85 \times 10^7 \text{g}^{1/2} \text{cm}^{-1/2} \text{K}^{-1/2}$

para obter a relação (2) consideramos a velocidade do som v_s

$$v_s^2 = \frac{\gamma k T}{\mu m_H}$$

onde γ é a razão dos calores específicos. Desta relação

$$\frac{T}{\mu} = \frac{m_H v_s^2}{\gamma k} \quad (4)$$

usando (1) e (4)

$$R_J = K_3 \left(\frac{m_H v_s^2}{\gamma k} \right)^{1/2} \frac{1}{\rho^{1/2}}$$

$$R_J = K_4 \frac{v_s}{\rho^{1/2}}$$

que é da forma (2). Usando (3) com $\gamma = 5/3$

$$K_4 = K_3 \left(\frac{m_H}{\gamma k} \right)^{1/2} = \left(\frac{15}{4 \pi G \gamma} \right)^{1/2} \simeq 3300 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{-3/2} \text{ s}$$

★ ★ ★

138. Considere uma nuvem protoestelar esférica com densidade média ρ . (a) Mostre que o tempo de queda livre, que é o tempo necessário para o colapso da nuvem sob a ação da gravidade, pode ser escrito, aproximadamente,

$$t_{ql} \simeq \frac{K}{\sqrt{\rho}}$$

(b) Qual é o valor da constante K , se a densidade estiver em g/cm^3 e o tempo em segundos? (c) determine a constante para medir o tempo em anos.

Solução:

(a) Chamando g a aceleração gravitacional, podemos usar as relações

$$R \simeq g t^2$$

$$g \simeq \frac{G M}{R^2}$$

$$\rho \simeq \frac{M}{(4/3) \pi R^3}$$

obtendo

$$t^2 \simeq \frac{R}{g} = \frac{R^3}{G M} = \frac{3}{4 \pi G \rho}$$

$$t \simeq \sqrt{\frac{3}{4 \pi G}} \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{K}{\sqrt{\rho}}$$

(b) Com unidades cgs a constante K é

$$K \simeq \sqrt{\frac{3}{4 \pi G}} \simeq \sqrt{\frac{3}{(4) (3.14) (6.67 \times 10^{-8})}} = 1.89 \times 10^3 \text{ cm}^{-3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}$$

(c) medindo t em anos, considerando $1 \text{ ano} = 3.16 \times 10^7 \text{ s}$

$$K = \frac{1.89 \times 10^3}{3.16 \times 10^7} = 5.98 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ ano}$$

★ ★ ★

139. (a) Mostre que o tempo de queda livre pode também ser escrito na forma

$$t_{ql} \simeq K' \frac{(R/R_\odot)^{3/2}}{(M/M_\odot)^{1/2}}$$

determine o valor da constante K' para obter o tempo em segundos. (b) Estime o tempo de queda livre para o Sol, para uma gigante vermelha com $M = M_\odot$ e $R = 100 R_\odot$, e para uma anã branca com $M = 0.6 M_\odot$ e $R = R_\odot/50$.

Solução:

Da equação de equilíbrio hidrostático temos

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0$$

Se a estrela colapsar sob a ação da força gravitacional, o termo dP/dr se anula e podemos escrever

$$\left| \frac{d^2r}{dt^2} \right| \simeq \frac{GM}{R^2} \simeq \frac{R}{t_{ql}^2}$$

$$t_{ql}^2 \simeq \frac{R^3}{GM} \simeq \frac{3}{4\pi G \bar{\rho}}$$

onde tomamos $r \simeq R$ e $M(r) \simeq M$ e usamos a densidade média $\bar{\rho}$.

Em termos solares, obtemos

$$t_{ql} \simeq K' \frac{(R/R_\odot)^{3/2}}{(M/M_\odot)^{1/2}}$$

medindo t_{ql} em segundos obtemos $K' \simeq 1.6 \times 10^3$

(b) Para o Sol, $t_{ql} \simeq 1.6 \times 10^3 \text{ s} = 27 \text{ min}$

para uma gigante vermelha $t_{ql} \simeq 18 \text{ dias}$

para uma anã branca $t_{ql} = 5.8 \text{ s}$

★ ★ ★

140. Considere uma nuvem esférica de raio $R = 100 \text{ pc}$ composta de H, com uma densidade $n_H = 1 \text{ cm}^{-3}$. (a) Qual é a massa da nuvem? (b) Qual é seu tempo de queda livre?

Solução:

$$(a) \rho = n_H m_H = (1) (1.67 \times 10^{-24}) = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3$$

$$M = \rho V = \rho \left(\frac{4}{3} \right) \pi R^3 = 2.06 \times 10^{38} \text{ g} = 1.04 \times 10^5 M_\odot$$

(b) Usando o resultado do Exercício 138

$$t_{ql} \simeq \frac{1.89 \times 10^3}{\sqrt{\rho}} \simeq \frac{1.89 \times 10^3}{\sqrt{1.67 \times 10^{-24}}} \simeq 1.46 \times 10^{15} \text{ s} \simeq 4.62 \times 10^7 \text{ anos}$$

★ ★ ★

141. Considere uma nuvem protoestelar composta de hidrogênio molecular em processo de colapso, tendo atingido uma densidade média de 10^4 cm^{-3} . Sua temperatura é de $T = 100 \text{ K}$. (a) Qual é a massa de Jeans da nuvem? (b) Qual é seu tempo de queda livre?

Solução:

$$(a) \rho = n_H \mu m_H = (10^4) (2) (1.67 \times 10^{-24}) = 3.34 \times 10^{-20} \text{ g/cm}^3$$

Usando o resultado do Exercício 136

$$M_J \simeq 1.2 \times 10^{-10} \frac{T^{3/2}}{\mu^{3/2} \rho^{1/2}}$$

$$M_J \simeq \frac{(1.2 \times 10^{-10}) (100)^{3/2}}{(2^{3/2}) (3.34 \times 10^{-20})^{1/2}} \simeq 230 M_\odot$$

$$(b) t_{ql} \simeq \frac{1.89 \times 10^3}{\sqrt{\rho}} \simeq 1.03 \times 10^{13} \text{ s} \simeq 3.26 \times 10^5 \text{ anos}$$

★ ★ ★

142. Considere uma nuvem protogaláctica que sofre um colapso em queda livre, segundo o modelo de Eggen et al. (1962). A nuvem tem massa comparável à massa da Galáxia, $M \simeq 5 \times 10^{11} M_\odot$, e está contida em um volume esférico de raio $R \simeq 50 \text{ kpc}$. (a) Qual seria a densidade média da nuvem? (b) Qual seria seu tempo de queda livre? Dê suas respostas em g/cm^3 e em anos, respectivamente.

Solução:

$$(a) \rho \simeq \frac{3 M}{4 \pi R^3} \simeq \frac{(3) (5 \times 10^{11}) (1.99 \times 10^{33})}{(4) (3.14) (50 \times 10^3 \times 3.09 \times 10^{18})^3} = 6.44 \times 10^{-26} \text{ g/cm}^3$$

$$(b) t_{ql} \simeq \frac{1.89 \times 10^3}{\sqrt{\rho}} \simeq 7.45 \times 10^{15} \text{ s} \simeq 2.36 \times 10^8 \text{ anos}$$

★ ★ ★

143. Considere uma nuvem protoestelar de massa M e raio R e determine a constante K na relação entre o tempo de queda livre e a densidade do gás (Exercício 138) considerando que a velocidade do colapso em queda livre é dada por

$$v(r) = \left[2 G M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \right]^{1/2}$$

Solução:

O tempo de colapso é (cf. Ryan & Norton 2010)

$$t_{ql} = \int_R^0 \frac{dt}{dr} dr$$

como $v(r) = -dr/dt$ e $dt/dr = -1/v(r)$ obtemos

$$t_{ql} = - \int_R^0 \left[2 G M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \right]^{-1/2} dr = - \left(\frac{R}{2 G M} \right)^{1/2} \int_R^0 \left[\frac{r}{R-r} \right]^{1/2} dr$$

usando a variável x tal que $r = x R$, temos $dr/dx = R$, com os limites

$x = 1$, $x = 0$, de modo que

$$t_{ql} = \left(\frac{R^3}{2 G M} \right)^{1/2} \int_0^1 \left[\frac{x}{1-x} \right]^{1/2} dx$$

com uma nova mudança de variáveis, $x = \sin^2 \theta$ e $dx/d\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, com os limites $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$:

$$t_{ql} = \left(\frac{R^3}{2 G M} \right)^{1/2} \int_0^{\pi/2} 2 \sin^2 \theta d\theta$$

considerando que $2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$ obtemos

$$t_{ql} = \left(\frac{R^3}{2 G M} \right)^{1/2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \left(\frac{R^3}{2 G M} \right)^{1/2} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

finalmente

$$t_{ql} = \left(\frac{\pi^2 R^3}{8 G M} \right)^{1/2}$$

como $M = (4/3) \pi R^3 \rho$ obtemos

$$t_{ql} = \left(\frac{3 \pi}{32 G \rho} \right)^{1/2}$$

isto é, a constante é dada por

$$K = \left(\frac{3 \pi}{32 G} \right)^{1/2}$$

PARTE 2 - VENTOS ESTELARES

EQUAÇÃO DE CONTINUIDADE

144. Mostre que a hipótese do contínuo é verificada pelo ar em uma sala de aula.

Solução:

A pressão na sala pode ser escrita

$$P \simeq nkT \rightarrow n \simeq \frac{P}{kT}$$

adotando $P \simeq 1 \text{ atm} \simeq 1.0 \times 10^6 \text{ dina/cm}^2$, $T \simeq 300 \text{ K}$

$$n \simeq 2.4 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$$

o caminho livre médio para colisões entre partículas do ar é

$$\lambda \simeq n^{-1/3} \simeq 3.5 \times 10^{-7} \text{ cm}$$

considerando uma dimensão típica R para a sala

$$R \simeq 3 \text{ m} \simeq 300 \text{ cm} \rightarrow \lambda \ll R, \text{ a hipótese é verificada}$$

★ ★ ★

145. Mostre que a hipótese de contínuo é válida para um copo de água.

Solução:

Considerando a densidade da água nas condições usuais, temos

$$\rho \simeq 1 \text{ g/cm}^3$$

a massa de uma molécula é $m \simeq 18m_H$, onde $m_H = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$

a densidade numérica de moléculas de água no copo é

$$n \simeq \frac{\rho}{m} \simeq \frac{\rho}{18m_H} \simeq 3 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$$

o caminho livre médio das moléculas pode ser aproximado pela

separação média entre as moléculas

$$\lambda \simeq n^{-1/3} \simeq 3 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

tomando a dimensão da base do copo como $R \simeq 5 \text{ cm}$, temos

$$\lambda \ll R, \text{ a hipótese é válida.}$$

★ ★ ★

146. Mostre que a hipótese de contínuo é válida para um envelope circunstelar de uma gigante vermelha considerando colisões entre grãos e o gás no envelope. Considere grãos esféricos com raio $a \simeq 1000 \text{ \AA} = 10^{-5} \text{ cm}$ e um envelope com uma densidade numérica de partículas $n_g \simeq 10^8 \text{ cm}^{-3}$.

Solução:

A seção de choque para colisões grãos-gás é da ordem da seção geométrica dos grãos, dada por

$$\sigma \simeq \pi a^2 \simeq 3 \times 10^{-10} \text{ cm}^2$$

o caminho livre médio dos grãos para estas colisões é

$$\lambda_{gr} \simeq \frac{1}{n_g \sigma} \simeq 30 \text{ cm}$$

tomando uma dimensão característica do envelope como igual ao raio da estrela, $R \simeq 10^{14} \text{ cm}$, vemos que $\lambda_{gr} \ll R$, justificando o tratamento do envelope de gás e grãos como um fluido.

★ ★ ★

147. Considere as condições do exercício anterior. (a) Qual seria o caminho livre médio para interações entre as próprias moléculas do gás? Compare este resultado com o caminho livre médio para interações gás-grãos obtido no exercício anterior. (b) Qual seria tipicamente a densidade numérica dos grãos? Adote uma razão grão-gás dada por $\rho_{gr}/\rho_g \simeq 1/200$ e grãos de silicatos com densidade interna $s = 3.0 \text{ g/cm}^3$.

Solução:

$$(a) \lambda_g \simeq \frac{1}{n_g^{1/3}} \simeq \frac{1}{(10^8)^{1/3}} \simeq 2 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

$$\lambda_g \ll \lambda_{gr}$$

(b) Com a razão grãos-gás dada temos

$$\frac{n_{gr} m_{gr}}{n_g m_g} = \frac{1}{200}$$

$$n_{gr} = \frac{n_g m_g}{200 m_{gr}}$$

$$\text{com } n_g \simeq 10^8 \text{ cm}^{-3} \text{ e } m_g \simeq m_H = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$$

$$m_{gr} \simeq s_{gr} V_{gr} \simeq s_{gr} \left(\frac{4}{3} \right) \pi a^3 \simeq 1.3 \times 10^{-14} \text{ g}$$

portanto

$$n_{gr} \simeq 6.4 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-3}$$

$$\frac{n_{gr}}{n_g} \simeq 6.4 \times 10^{-13}$$

ou seja, $n_{gr} \ll n_g$

★ ★ ★

148. A partir da equação de continuidade na forma vetorial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

escreva a equação de continuidade no caso unidimensional. Como fica esta equação no estado estacionário?

Solução:

Da equação de continuidade, tomando a velocidade unidimensional u

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

no caso estacionário

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \longrightarrow u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

portanto

$$\rho u = \text{constante}$$

★ ★ ★

149. Seja μ a densidade de uma grandeza física qualquer, que pode ser a carga, a massa, energia, etc. Chamando Q a quantidade dessa grandeza criada por centímetro cúbico e por segundo, mostre que a equação de conservação de μ pode ser escrita

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{v}) = Q$$

Solução:

Integrando em um volume V em torno de uma superfície de área S

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mu dV = - \oint \mu \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_V Q dV$$

(ver por exemplo Maciel 2005, seção 1.3)

usando o teorema da divergência

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mu dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{v}) dV = \int_V Q dV$$

$$\int_V \left[\frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{v}) \right] dV = \int_V Q dV$$

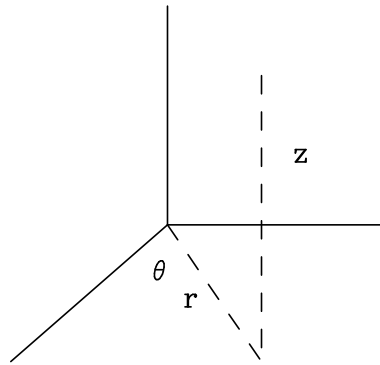
portanto

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{v}) = Q$$

★ ★ ★

150. Em diversos casos são observados discos em torno das estrelas, de modo que a ejeção de matéria pode ser bem descrita com a utilização de coordenadas cilíndricas. Escreva a equação de continuidade nessas coordenadas.

Solução:



Usando as coordenadas r, θ, z temos

$$dV = r dr d\theta dz$$

para o vetor $\vec{A}(A_r, A_\theta, A_z)$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Considerando $\vec{V}(V_r, V_\theta, V_z)$, da equação de continuidade temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} = 0$$

(Exercício 148). Com simetria azimutal $V_\theta = 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V_r) + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} = 0$$

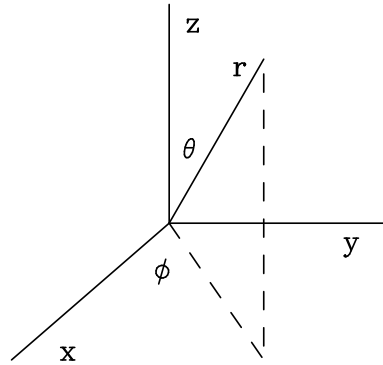
no estado estacionário

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V_r) + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} = 0$$

★ ★ ★

151. (a) Escreva a equação de continuidade em coordenadas esféricas. (b) Como fica esta equação se houver simetria esférica? (c) Como fica a equação em estado estacionário?

Solução:



Considerando as coordenadas esféricas r, θ, ϕ , temos as seguintes relações

$$x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta$$

o elemento de volume dV pode ser escrito

$$dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

a equação de continuidade pode ser escrita em coordenadas esféricas como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \rho v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v_\phi) = 0$$

onde (v_r, v_θ, v_ϕ) são as coordenadas do vetor $\vec{v}$.

(b) Com simetria esférica, $v_\theta = v_\phi = 0$, o escoamento é unidimensional e a equação de continuidade fica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) = 0$$

onde consideramos $v_r = v$.

(c) Se o escoamento for unidimensional e estacionário, temos

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho v) = 0$$

★ ★ ★

152. A partir da equação de continuidade com simetria esférica e no estado estacionário obtida no exercício anterior, obtenha uma expressão para a taxa de perda de massa, dM/dt .

Solução:

A equação é facilmente integrável com a solução

$$r^2 \rho v = \text{constante}$$

Esta equação significa que o objeto está continuamente fornecendo matéria ao gás em movimento. Seja $dM/dt = \dot{M}$ a taxa de perda de massa. Pela conservação da massa, essa taxa deve ser igual à massa por unidade de tempo que atravessa uma casca esférica de espessura dr , massa dM , na posição r , onde a densidade do gás é ρ e a velocidade é $v = dr/dt$, ou seja

$$dM = 4 \pi r^2 \rho dr$$

$$\frac{dM}{dt} = \dot{M} = 4 \pi r^2 \rho \frac{dr}{dt} = 4 \pi r^2 \rho v$$

★ ★ ★

153. Obtenha uma relação entre a taxa de perda de massa em $M_\odot/\text{ano}$ e g/s.

Solução:

Podemos escrever para a taxa de perda de massa

$$\frac{dM}{dt} \text{ (g/s)} = 4 \pi r^2 \text{ (cm}^2\text{)} \rho \text{ (g/cm}^3\text{)} v \text{ (cm/s)}$$

portanto

$$\frac{dM}{dt} (M_\odot/\text{ano}) = \frac{dM}{dt} \text{ (g/s)} \frac{3.16 \times 10^7 \text{ s}}{1.99 \times 10^{33} \text{ ano}} \frac{M_\odot}{\text{g}}$$

$$\frac{dM}{dt} (M_\odot/\text{ano}) \simeq 1.6 \times 10^{-26} \frac{dM}{dt} \text{ (g/s)}$$

★ ★ ★

154. Uma estrela esférica perde massa a uma taxa constante. (a) Se a velocidade do gás for constante, como será a variação da densidade com a posição no envelope? (b) O que acontece com a densidade do gás na região de aceleração, em que a velocidade do escoamento aumenta?

Solução:

(a) Da equação de continuidade

$$r^2 \rho v = \text{constante}$$

com v constante, $\rho \propto r^{-2}$

podemos escrever ainda

$$r^2 \rho = \frac{\text{constante}}{v_0} = \frac{k}{v_0}$$

$$\text{portanto } \rho = \frac{k}{v_0 r^2}$$

(b) Nesse caso

$$\rho = \frac{k}{v r^2}$$

para $v > v_0$ a densidade ρ cai mais rapidamente. Por exemplo, se $v \propto r^\alpha$ com $\alpha > 0$ temos

$$\rho = \frac{k}{r^{2+\alpha}}$$

★ ★ ★

155. As equações de continuidade e de equilíbrio hidrostático podem ser escritas como

$$\frac{dM}{dr} = 4 \pi r^2 \rho(r)$$

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G M(r)}{r^2}$$

Estas são as formas *Eulerianas* das equações, em que a variável independente é a posição r . Escreva estas equações na forma *Lagrangeana*, em que a massa M é a variável independente.

Solução:

Da equação de continuidade podemos escrever simplesmente

$$\frac{dr}{dM} = \frac{1}{4 \pi r^2 \rho(M)}$$

para a equação de equilíbrio hidrostático

$$\frac{dP}{dM} = - \frac{G M \rho}{r^2} \frac{1}{4 \pi r^2 \rho}$$

$$\frac{dP}{dM} = - \frac{G M}{4 \pi r(M)^4}$$

★ ★ ★

156. (a) Escreva a equação de continuidade segundo a notação tensorial cartesiana. (b) Como fica esta equação no caso de um fluido incompressível?

Solução:

(a) A equação de continuidade na notação vetorial é (cf. Maciel 2005)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

que pode ser escrita em notação tensorial cartesiana na forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = 0$$

usando a expressão

$$\frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k} = \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + v_i \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$$

a equação de continuidade pode também ser colocada na forma

$$\frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k} = \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - v_i \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

(b) No caso de um fluido incompressível $\partial \rho / \partial t = 0$, e

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho = 0$$

$$\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

em notação tensorial cartesiana temos

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$$

★ ★ ★

VENTO SOLAR

157. O vento solar é um fluxo de partículas carregadas que atinge a órbita da Terra. (a) Estime o fluxo de massa considerando que a densidade observada de prótons à distância de $1 \text{ UA} = 1.5 \times 10^{13} \text{ cm}$ do Sol é $n_p \simeq 10 \text{ cm}^{-3}$, com velocidades $v \simeq 400 \text{ km/s}$. (b) Qual é o fluxo de partículas correspondente? (c) Estime a taxa de perda de massa do Sol.

Solução:

(a) O fluxo de massa pode ser escrito

$$j \simeq \rho v \simeq n_p m_H v \simeq 6.7 \times 10^{-16} \text{ g cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

(b) O fluxo de partículas é simplesmente

$$j' \simeq n_p v \simeq 4.0 \times 10^8 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

(c) A taxa de perda de massa do Sol é

$$\frac{dM}{dt} (M_\odot/\text{ano}) \simeq 2.0 \times 10^{-25} r^2 \rho v$$

onde r está em cm, v em cm/s e ρ em g/cm³. O valor obtido é

$$\frac{dM}{dt} \simeq 3.0 \times 10^{-14} M_\odot/\text{ano}$$

★ ★ ★

158. Considere que o Sol tem uma taxa de perda de massa $\dot{M} = dM/dt \simeq 3 \times 10^{-14} M_\odot/\text{ano}$ e uma idade de 4.5 bilhões de anos. Supondo que a taxa de perda de massa observada hoje tenha permanecido constante durante toda a vida do Sol, qual era sua massa no início de sua evolução? Esta hipótese parece razoável?

Solução:

Para estimar a massa original podemos escrever

$$\dot{M} \simeq \frac{\Delta M}{\Delta t}$$

$$\Delta M \simeq \dot{M} \Delta t \simeq (3 \times 10^{-14}) (4.5 \times 10^9) \simeq 1.35 \times 10^{-4} M_\odot$$

portanto

$$M_0 = M_\odot + 1.35 \times 10^{-4} M_\odot = 1.000135 M_\odot$$

a hipótese não é razoável, pois no início de sua evolução a taxa de perda de massa deve ter sido mais alta.

★ ★ ★

159. Considere a taxa de perda de massa do Sol $dM/dt \simeq 3.0 \times 10^{-14} M_\odot/\text{ano}$ e estime a luminosidade perdida por esse processo, comparando-a com a luminosidade de fótons.

Solução:

Adotando $v \simeq 400 \text{ km/s}$ para a velocidade do vento solar

$$L_p \simeq \frac{dM}{dt} v^2 \simeq 3.0 \times 10^{27} \text{ erg/s}$$

$$L_\odot = 3.85 \times 10^{33} \text{ erg/s}$$

$$\frac{L_p}{L_\odot} \simeq 7.9 \times 10^{-7}$$

★ ★ ★

160. Compare a taxa de perda de massa do Sol $dM/dt \simeq 3.0 \times 10^{-14} M_{\odot}/\text{ano}$ com a taxa de perda de massa termonuclear do Sol, que é a taxa necessária para que o Sol mantenha a luminosidade observada de $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{33} \text{ erg/s}$.

Solução:

A taxa de perda de massa termonuclear é aproximadamente

$$\dot{M}_T \simeq \frac{L_{\odot}}{c^2} \simeq \frac{3.85 \times 10^{33}}{(3.0 \times 10^{10})^2} \simeq 4.3 \times 10^{12} \text{ g/s} = 6.8 \times 10^{-14} M_{\odot}/\text{ano}$$

ou seja, $\dot{M}/\dot{M}_T \simeq 0.44$

★ ★ ★

161. Considerando que o Sol é uma estrela esférica com massa $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{33} \text{ g}$ e raio $R_{\odot} = 6.96 \times 10^{10} \text{ cm}$, estime em ordem de grandeza o valor do gradiente de pressão no Sol. Compare seu resultado com o valor obtido pelo chamado “modelo padrão do Sol” para a região do interior solar onde $r = R_{\odot}/2$, $dP/dr \simeq -1.3 \times 10^5 \text{ dina/cm}^3$.

Solução:

O gradiente de pressão pode ser escrito

$$\frac{dP}{dr} \simeq -\frac{G M_* \rho}{r^2}$$

$$\left. \frac{dP}{dr} \right|_{\odot} \simeq -\frac{G M_{\odot} \bar{\rho}_{\odot}}{R_{\odot}^2} \simeq -\frac{G M_{\odot}}{R_{\odot}^2} \frac{M_{\odot}}{(4/3) \pi R_{\odot}^3} \simeq -\frac{3 G M_{\odot}^2}{4 \pi R_{\odot}^5}$$

$$\left. \frac{dP}{dr} \right|_{\odot} \simeq -3.9 \times 10^4 \text{ dina/cm}^3$$

ou seja

$$\frac{(dP/dr)_{mod}}{dP/dr} \simeq 3.3$$

★ ★ ★

162. (a) Considere a coroa solar isotérmica com uma temperatura $T \simeq 1.5 \times 10^6 \text{ K}$. Admita que o vento solar é iniciado em uma distância de referência dada por $r_0 \simeq R_{\odot} = 6.96 \times 10^{10} \text{ cm}$ com uma densidade de prótons e elétrons $n_0 \simeq 4 \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$ e que a coroa está em equilíbrio hidrostático. Neste caso, a Terra, situada a 1 UA $= 1.5 \times 10^{13} \text{ cm}$ do Sol, está envolvida por um material coronal de alta temperatura. Estime a densidade do gás coronal na posição da Terra.

Solução:

A equação de equilíbrio hidrostático pode ser escrita

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G M_{\odot} n m_H}{r^2}$$

supondo que o plasma contém prótons e elétrons em partes iguais, podemos escrever a equação de estado na forma

$$P = 2 n k T$$

temos então

$$\frac{dP}{dr} = 2 k T \frac{dn}{dr} = -\frac{G M_{\odot} n m_H}{r^2}$$

de modo que

$$\frac{dn}{n} = -\frac{G M_{\odot} m_H}{2 k T} r^{-2} dr = -\frac{1}{h} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 dr$$

onde introduzimos a escala de altura h dada por

$$\frac{1}{h} = \frac{G M_{\odot} m_H}{2 k T r_0^2}$$

integrando a relação para dn/n entre r_0 e r , onde a densidade de partículas tem valores n_0 e n , respectivamente, obtemos

$$n(r) = n_0 \exp \left[-\frac{r_0^2}{h} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \right]$$

com os valores dados de T , n_0 , e r_0 obtemos

$$h \simeq 9.0 \times 10^9 \text{ cm} = 9.0 \times 10^4 \text{ km}$$

portanto, em $r = 1 \text{ UA}$ a densidade do gás coronal é

$$n(1\text{UA}) \simeq 1.8 \times 10^5 \text{ cm}^{-3}$$

A hipótese de coroa isotérmica é muito grosseira, e um cálculo mais realista produz valores mais baixos para a densidade em $r = 1 \text{ UA}$ (cf. Maciel 2005)

★ ★ ★

163. Considere o caso de uma coroa solar hidrostática adiabática, mantidas as hipóteses do exercício anterior, com $T \simeq 1.5 \times 10^6 \text{ K}$, $n_0 \simeq 4 \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$ e $r_0 \simeq R_{\odot} = 6.96 \times 10^{10} \text{ cm}$ e estime a densidade do gás coronal na posição da Terra, comparando com o resultado do exercício anterior.

Solução:

Usando as equações de equilíbrio hidrostático e de estado obtemos

$$\frac{dP}{dr} = 2 k T \frac{dn}{dr} + 2 n k \frac{dT}{dr} = -\frac{G M_{\odot} n m_H}{r^2}$$

em uma expansão adiabática, lembrando que $\rho \simeq 2 n m_H$, temos

$$T = \frac{T_0}{n_0^{\gamma-1}} n^{\gamma-1}$$

onde γ é a razão dos calores específicos. Derivando esta relação e usando a expressão para dP/dr obtemos

$$\frac{2\gamma k T_0}{n_0^{\gamma-1}} n^{\gamma-1} \frac{dn}{dr} = -\frac{G M_\odot n m_H}{r^2}$$

com a escala de altura h (em $T = T_0$) do exercício anterior temos

$$n^{\gamma-2} dn = -\frac{n_0^{\gamma-1} r_0^2}{\gamma h} r^{-2} dr$$

que pode ser integrada entre r_0 a r e n_0 a n , com o resultado

$$n(r) = n_0 \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{r_0^2}{h} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

As soluções interessantes são aquelas em que $(\gamma-1)/\gamma < h/r_0 \simeq 0.13$, com os dados do exercício anterior. Por exemplo, tomando $\gamma = 1.05$, obtemos $n \simeq 4.6 \times 10^4 \text{ cm}^{-3}$ em $r = 1 \text{ UA} = 1.5 \times 10^{13} \text{ cm}$, valor 40 vezes menor do que a densidade obtida com o modelo isotérmico.

★ ★ ★

164. Em um modelo mais realístico para a coroa solar, a variação de temperatura é dada por $T(r) = T_0 (r_0/r)^{2/7}$, onde $r_0 \simeq R_\odot = 6.96 \times 10^{10} \text{ cm}$ e $T_0 \simeq 1.5 \times 10^6 \text{ K}$ são os valores da posição r e temperatura T em um certo nível de referência próximo à superfície do Sol. (a) Qual seria a temperatura do gás coronal na órbita da Terra? (b) Suponha que a coroa solar está em equilíbrio hidrostático. Qual é a variação da densidade do gás coronal com a distância? Qual é a densidade em $r = 1 \text{ UA}$? (cf. Maciel 2005)

Solução:

$$(a) T(1 \text{ UA}) = 1.5 \times 10^6 \left(\frac{6.96 \times 10^{10}}{1.5 \times 10^{13}} \right)^{2/7} = 3.2 \times 10^5 \text{ K} = 0.22 T_0$$

(b) Como no exercício anterior, podemos escrever

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G M_\odot n m_H}{r^2}$$

$$P = 2 n k T$$

$$\frac{dP}{dr} = 2 k T \frac{dn}{dr} + 2 n k \frac{dT}{dr}$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{2}{7} T_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{-5/7} \left(-\frac{r_0}{r^2} \right) = -\frac{2}{7} \frac{T_0 r_0}{r^2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{5/7}$$

$$2 k T \frac{dn}{dr} + 2 n k \frac{dT}{dr} = - \frac{G M_{\odot} n m_H}{r^2}$$

$$2 k T_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2/7} \frac{dn}{dr} = (2 n k) \frac{2}{7} \frac{T_0 r_0}{r^2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{5/7} - \frac{G M_{\odot} n m_H}{r^2}$$

$$\frac{dn}{n} = \left[2 k \frac{2}{7} \frac{T_0 r_0}{r^2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{5/7} - \frac{1}{2 k T_0} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2/7} - \frac{G M_{\odot} m_H}{2 k T_0 r^2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2/7} \right] dr$$

com a mesma escala de altura h

$$\frac{1}{h} = \frac{G M_{\odot} m_H}{2 k T_0 r_0^2}$$

$$\frac{dn}{n} = \left[\frac{2}{7 r} - \frac{1}{h} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-12/7} \right] dr$$

$$\int_{n_0}^n \frac{dn}{n} = \int_{r_0}^r \left[\frac{2}{7 r} - \frac{1}{h} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-12/7} \right] dr$$

$$\ln n = \ln n_0 + \frac{2}{7} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} - \frac{1}{h} \int_{r_0}^r \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-12/7} dr$$

$$\ln n = \ln n_0 + \frac{2}{7} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) - \frac{7 r_0}{5 h} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{5/7} \right]$$

obtemos

$$n = n_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2/7} \exp \left[- \frac{7 r_0 [1 - (r_0/r)^{5/7}]}{5 h} \right]$$

$$n(1 \text{ UA}) = 4.7 \times 10^4 \text{ cm}^{-3}$$

★ ★ ★

165. Em um vento coronal, parte da energia pode ser transportada pela condução eletrônica. O fluxo condutivo ($\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$) é $F_c = -\kappa_c (dT/dr)$, onde κ_c é o coeficiente de condutividade térmica, dado por $\kappa_c = \kappa_0 T^{5/2}$, onde $\kappa_0 = 1.0 \times 10^{-6} \text{ erg cm}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-7/2}$. (a) A luminosidade condutiva L_c (erg/s) é a energia total conduzida por segundo através de uma esfera de raio r . Como deve ser a variação da temperatura com a posição r para que a luminosidade condutiva seja constante? (b) Em um modelo para a coroa solar, a temperatura decresce com a posição de acordo com a tabela abaixo. Qual é o valor da luminosidade condutiva neste modelo? Como varia L_c com a posição r ? Que fração da luminosidade solar é transportada pela condução?

$r(R_{\odot})$	1.0	5.0	10.0	20.0	30.0	40.0	50.0
$T(10^6 \text{ K})$	2.0	1.15	0.90	0.75	0.70	0.65	0.60

Solução:

$$(a) \quad L_c = 4 \pi r^2 F_c = -4 \pi r^2 \kappa_c \frac{dT}{dr} = -4 \pi r^2 \kappa_0 T^{5/2} \frac{dT}{dr}$$

Para L_c constante temos

$$T^{5/2} \frac{dT}{dr} \propto r^{-2}$$

ou seja

$$T^{5/2} dT \propto \frac{dr}{r^2} \longrightarrow T^{7/2} \propto r^{-1} \longrightarrow T \propto r^{-2/7}$$

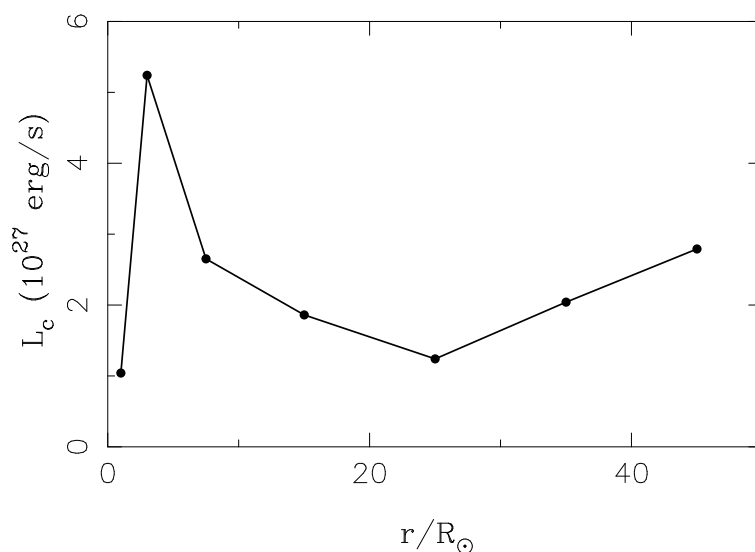
se T decrescer mais rápido que $r^{-2/7} \longrightarrow L_c$ diminui

se T decrescer mais lento que $r^{-2/7} \longrightarrow L_c$ aumenta

(b) Interpolando os dados obtemos os resultados da tabela e figura a seguir.

$r(R_\odot)$	$T(10^6 \text{ K})$	$dT/dr \text{ (K/cm)}$	$L_c \text{ (erg/s)}$
1.0	2.00	-3.02×10^{-6}	1.04×10^{27}
3.0	1.58	-3.05×10^{-6}	5.24×10^{27}
5.0	1.15		
7.5	1.03	-7.18×10^{-7}	2.65×10^{27}
10.0	0.90		
15.0	0.83	-2.16×10^{-7}	1.86×10^{27}
20.0	0.75		
25.0	0.73	-7.18×10^{-8}	1.24×10^{27}
30.0	0.70		
35.0	0.68	-7.18×10^{-8}	2.04×10^{27}
40.0	0.65		
45.0	0.63	-7.18×10^{-8}	2.79×10^{27}
50.0	0.60		

$$\frac{L_c}{L_\odot} \simeq \frac{2.79 \times 10^{27}}{3.85 \times 10^{33}} \simeq 7.3 \times 10^{-7}$$



★ ★ ★

166. O fluxo de massa $j = \rho v$ (unidades: $\text{g cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$) pode também ser considerado como uma densidade de quantidade de movimento, ou quantidade de movimento por unidade de volume (unidades: $\text{g cm s}^{-1} \text{ cm}^{-3}$). Considerando que o Sol tem um raio $R_{\odot} = 6.96 \times 10^{10} \text{ cm}$, determine o fluxo de massa próximo à superfície do Sol. Compare seu resultado com o valor em $r = 1 \text{ UA}$.

Solução:

A taxa de perda de massa do Sol pode ser escrita

$$\frac{dM}{dt} \simeq 4\pi R_{\odot}^2 (\rho v)_{R_{\odot}} \simeq 3.0 \times 10^{-14} M_{\odot}/\text{ano}$$

portanto

$$(\rho v)_{R_{\odot}} = j_{R_{\odot}} = \frac{3.0 \times 10^{-14}}{1.6 \times 10^{-26}} \frac{1}{4\pi(6.96 \times 10^{10})^2}$$

$$j_{R_{\odot}} \simeq 3.1 \times 10^{-11} \text{ g cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

comparando com o fluxo em 1 UA (Exercício 157)

$$j_{UA} \simeq 6.7 \times 10^{-16} \text{ g cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$\frac{j_{R_{\odot}}}{j_{UA}} \simeq 4.6 \times 10^4$$

pois

$$\left(\frac{r}{R_{\odot}}\right)^2 = \left(\frac{1UA}{R_{\odot}}\right)^2 = \left(\frac{1.5 \times 10^{13}}{6.96 \times 10^{10}}\right)^2 = 4.6 \times 10^4$$

★ ★ ★

PERDA DE MASSA DAS ESTRELAS

167. As estrelas gigantes vermelhas apresentam evidências de ventos lentos, com velocidades tipicamente da ordem de $v \simeq 10 \text{ km/s}$. As dimensões dos envelopes dessas estrelas são da ordem de $r \simeq 10^{14} \text{ cm}$, e as densidades das partículas do gás são da ordem de $n \simeq 3 \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$. (a) Estime a taxa de perda de massa destas estrelas. (b) Suponha que o gás atinja a velocidade terminal na região onde $r \simeq 10 R \simeq 10^{14} \text{ cm}$, onde R é o raio da estrela. Qual seria a luminosidade da estrela, considerando que sua temperatura efetiva é $T_{ef} \simeq 2500 \text{ K}$?

Solução:

(a) Temos

$$\rho \simeq n m_H \simeq 5 \times 10^{-16} \text{ g/cm}^3$$

e a taxa de perda de massa é

$$\frac{dM}{dt} \simeq 2.0 \times 10^{-25} r^2 \rho v \simeq 1.0 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{ano}$$

$$(b) L = 4 \pi R^2 \sigma T_{ef}^4 = 2.8 \times 10^{36} \text{ erg/s} \simeq 720 L_{\odot}$$

$$\log L/L_{\odot} \simeq 2.86$$

★ ★ ★

168. Uma estrela gigante fria tem um vento impulsionado pela ação da pressão da radiação estelar sobre a poeira circumstelar com uma velocidade terminal $v_f = 30 \text{ km/s}$. Considere uma região na faixa do infravermelho próximo onde $\lambda \simeq 1 \mu\text{m}$. (a) Qual é o deslocamento Doppler máximo que poderia ser produzido nesta região espectral pelo movimento de expansão do envelope? (b) Qual seria a importância das variações da opacidade no contínuo e do campo de radiação estelar nesta região espectral causadas pelo efeito Doppler?

Solução:

$$(a) \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$$

$$\Delta \lambda = \lambda \frac{v}{c} = \frac{(10000)(30)}{300000} \simeq 1 \text{ Å}$$

(b) muito pequena

★ ★ ★

169. (a) Mostre que a taxa de perda de massa pode ser escrita

$$\frac{dM}{dt} \simeq 2 \times 10^{-20} r^2 \rho v$$

onde dM/dT está em $M_{\odot}/\text{ano}$, r em cm, ρ em g/cm^3 e v em km/s . (b) Estime a densidade no envelope circunstelar de uma gigante vermelha, considerando que a velocidade do vento é de $10 \text{ km}/\text{s}$, as dimensões do envelope são da ordem de 10^{14} cm e a taxa de perda de massa é de $10^{-6} M_{\odot}/\text{ano}$.

Solução:

$$(a) \quad dM/dt \simeq 4\pi r^2 \rho v$$

$$\frac{dM}{dt} (M_{\odot}/\text{ano}) = \frac{(4\pi)(10^5)(3.16 \times 10^7)}{1.99 \times 10^{33}} r^2 \rho v \simeq 2 \times 10^{-20} r^2 \rho v$$

$$(b) \quad \rho \simeq \frac{dM/dt}{(2 \times 10^{-20}) r^2 v} \simeq \frac{10^{-6}}{(2 \times 10^{-20})(10^{28})(10)} \simeq 5 \times 10^{-16} \text{ g}/\text{cm}^3$$

$$n \simeq \frac{\rho}{m_H} \simeq 3 \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$$

★ ★ ★

170. Estrelas quentes, como as supergigantes de tipo espectral B, apresentam ventos rápidos, com velocidades tipicamente da ordem de $v \simeq 2000 \text{ km}/\text{s}$. Essas estrelas têm luminosidades da ordem de $L \simeq 10^5 L_{\odot}$ e temperaturas efetivas típicas $T_{ef} \simeq 20000 \text{ K}$. Admita que os ventos se originam nas vizinhanças da superfície da estrela, onde $r \simeq 2R$ e a densidade média é da ordem de $\rho \simeq 10^{-14} \text{ g}/\text{cm}^3$, e estime a taxa de perda de massa das estrelas.

Solução:

O raio das estrelas pode ser estimado por

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$$

$$\text{obtemos } R \simeq 1.8 \times 10^{12} \text{ cm} \simeq 26 R_{\odot}$$

$$dM/dt \simeq 4\pi (2R)^2 \rho v \simeq 3.3 \times 10^{20} \text{ g/s} \simeq 5.2 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{ano}$$

★ ★ ★

171. A estrela central da nebulosa planetária He2-99 tem uma taxa de perda de massa $dM/dt \simeq 4 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{ano}$, medida a partir de um estudo da composição química do vento. A velocidade do vento alcança $1200 \text{ km}/\text{s}$. A estrela tem uma luminosidade $\log(L/L_{\odot}) \simeq 3.2$ e sua temperatura é de 27000 K . (a) Supondo que a velocidade dada seja alcançada em $r \simeq 10R$, onde R é o raio da estrela, qual é a densidade de massa do vento nessa região? (b) Suponha que o vento seja constituído apenas de H e He neutros, com uma proporção de 10 átomos de H para cada átomo de He. Qual é a densidade média de partículas por cm^3 no vento?

Solução:

(a) O raio da estrela pode ser obtido por

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$$

$$\text{como } \log(L/L_\odot) = 3.2 \longrightarrow L = 1.58 \times 10^3 L_\odot = 6.10 \times 10^{36} \text{ erg/s}$$

$$\text{temos } R = 1.27 \times 10^{11} \text{ cm} = 1.8 R_\odot$$

de modo que

$$r \simeq 10 R \simeq 1.27 \times 10^{12} \text{ cm}$$

A taxa de perda de massa pode ser escrita

$$\frac{dM}{dt} (M_\odot/\text{ano}) = 2.0 \times 10^{-20} r^2 (\text{cm}^2) \rho (\text{g/cm}^3) v (\text{km/s})$$

$$\rho \simeq 1.0 \times 10^{-13} \text{ g/cm}^3$$

(b) A densidade média de partículas é

$$n = \frac{\rho}{\mu m_H}$$

mas

$$\mu m_H = \frac{n_H m_H + n_{He} m_{He}}{n_H + n_{He}} = \frac{1 + 4(n_{He}/n_H)}{1 + (n_{He}/n_H)} m_H$$

$$\mu = \frac{1 + 4 \times 0.1}{1 + 0.1} \simeq 1.3$$

e a densidade fica

$$n = \frac{1.0 \times 10^{-13}}{1.3 (1.67 \times 10^{-24})} \simeq 4.6 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$$

★ ★ ★

172. Uma relação empírica entre a taxa de perda de massa e o período de pulsação em estrelas AGB pode ser escrita

$$\log \frac{dM}{dt} = -11.4 + 0.0123 P$$

onde dM/dt está em $M_\odot/\text{ano}$ e P em dias, válida para períodos $P \leq 600$ dias (Vassiliadis & Wood 1993). (a) Qual seria a taxa de perda de massa para uma estrela Mira com um período igual a um ano? (b) Acima de $P = 600$ dias a taxa permanece essencialmente constante, constituindo o chamado “supervento”. Qual seria o valor desta taxa máxima?

Solução:

$$(a) P = 365 \text{ dias, } \log dM/dt \simeq -6.9 \text{ e } dM/dt \simeq 1.3 \times 10^{-7} M_\odot/\text{ano}$$

$$(b) P = 600 \text{ dias, obtemos } \log dM/dt \simeq -4.0 \text{ e } dM/dt \simeq 10^{-4} M_\odot/\text{ano}$$

★ ★ ★

173. Uma relação frequentemente usada para a taxa de perda de massa de estrelas gigantes vermelhas é a fórmula de Reimers (1975)

$$\dot{M} \simeq 4 \times 10^{-13} \eta \frac{(L_*/L_\odot)(R_*/R_\odot)}{M_*/M_\odot}$$

onde dM/dt está em $M_\odot/\text{ano}$, a luminosidade, raio e massa da estrela são dados em termos das quantidades solares, e η é um parâmetro ajustável. (a) Qual seria a taxa esperada para uma estrela gigante com $L = 10^3 L_\odot$, $M = 1.0 M_\odot$ e $R = 100 R_\odot$? Adote o parâmetro $\eta \simeq 3.0$. (b) A estrela δ Sge (M2 II) tem $\log L/L_\odot \simeq 3.4$, $R/R_\odot \simeq 140$ e $M \simeq 8.0 M_\odot$. Sua taxa de perda de massa estimada é $dM/dt \simeq 2 \times 10^{-8} M_\odot/\text{ano}$. Qual seria o valor correspondente do parâmetro η para reproduzir esta taxa com a fórmula de Reimers?

Solução:

(a) Com os valores dados temos

$$dM/dT = 1.2 \times 10^{-7} M_\odot/\text{ano}$$

(b) Neste caso

$$\eta \simeq \frac{\dot{M} (M/M_\odot)}{(4 \times 10^{-13}) (L/L_\odot) (R/R_\odot)} \simeq 1.14$$

★ ★ ★

174. Uma estrela chega à sequência principal com $2 M_\odot$, permanecendo durante 10^{10} anos nessa fase, com uma taxa de perda de massa de $10^{-14} M_\odot/\text{ano}$. Em seguida, desloca-se para o ramo das gigantes frias, onde a taxa de perda de massa é de $5 \times 10^{-7} M_\odot/\text{ano}$ por um período de 2×10^6 anos. No topo do ramo assintótico das gigantes (AGB), é ejetada uma nebulosa planetária, cuja massa é de $0.2 M_\odot$. Nessa fase, a taxa de perda de massa da estrela central é de $5 \times 10^{-6} M_\odot/\text{ano}$, durando cerca de 2×10^4 anos até a formação de uma anã branca. Qual é a massa da anã branca formada?

Solução:

$$M_{ab} \simeq M_{SP} - \dot{M}_{SP} t_{SP} - \dot{M}_g t_g - M_{np} - \dot{M}_{ec} t_{ec}$$

$$M_{SP} \simeq 2.0 M_\odot, \dot{M}_{SP} \simeq 10^{-14} M_\odot/\text{ano}, t_{SP} \simeq 10^{10} \text{ ano}$$

$$\dot{M}_g \simeq 5 \times 10^{-7} M_\odot/\text{ano}, t_g \simeq 2 \times 10^6 \text{ ano}$$

$$M_{np} \simeq 0.2 M_\odot$$

$$\dot{M}_{ec} \simeq 5 \times 10^{-6} M_\odot/\text{ano}, t_{ec} \simeq 2 \times 10^4 \text{ ano},$$

$$M_{ab} \simeq 0.7 M_\odot$$

★ ★ ★

EQUAÇÃO DE EULER

175. (a) Escreva a equação de Euler em coordenadas esféricas, admitindo simetria esférica. (b) Como fica a equação obtida em (a) admitindo estado estacionário? (c) Mostre que a relação obtida em (b) no caso estacionário se reduz à equação de equilíbrio hidrostático.

Solução:

(a) A equação de Euler pode ser escrita na forma vetorial

$$\frac{D\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \frac{1}{\rho}\vec{F}$$

em coordenadas esféricas, com simetria esférica

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\rho} F$$

(b) No caso estacionário $v = 0$

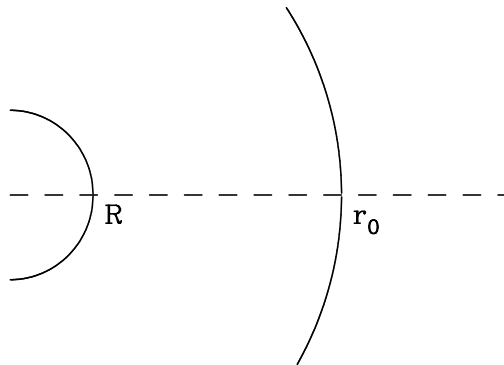
$$\frac{dP}{dr} = F$$

(c) As forças de pressão devem equilibrar a força gravitacional, ou seja

$$\frac{dP}{dr} = F = -\rho g = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

★ ★ ★

176. Um gradiente de pressão negativo ($dP/dr < 0$) é necessário para haver equilíbrio hidrostático. Imagine que este gradiente se anula repentinamente, deixando o gás em um envelope estelar sob a ação apenas da gravidade. Considere um ponto inicial à distância r_0 da estrela, onde $v_0 = 0$, e (a) obtenha a velocidade atingida pelo elemento de fluido ao se aproximar da superfície da estrela, onde $r = R$. (b) Estime o tempo de queda livre, isto é, o tempo necessário para que o gás no envelope caia sobre a superfície da estrela. (c) Aplique seu resultado a uma estrela gigante vermelha com $M = 1 M_\odot$, $R = 100 R_\odot$ e $r_0 \simeq 2 R$. (cf. Maciel 2005)



Solução:

(a) Da equação de Euler com $dP/dr = 0$

$$v \frac{dv}{dr} \simeq -g_*$$

integrando esta equação, admitindo $g \simeq G M/R^2 \simeq \text{constante}$

$$\int_0^{v(R)} v \, dv = - \int_{r_0}^R g_* \, dr \simeq g_*(r_0 - R)$$

ou seja

$$v(R)^2 \simeq 2 g_*(r_0 - R)$$

$$v(R) \simeq \sqrt{2 g_*(r_0 - R)}$$

(b) O tempo de queda livre pode ser estimado considerando que

$$v \frac{dv}{dr} = v \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{dv}{dt} = -g$$

$$t \simeq \frac{v(R)}{g} = \frac{\sqrt{2 g (r_0 - R)}}{g} \simeq \sqrt{\frac{2 (r_0 - R)}{g}}$$

(c) Neste caso

$$v(R) \simeq \sqrt{2 g R}$$

para a estrela gigante vermelha temos

$$g \simeq 2.74 \text{ cm/s}^2$$

$$v(R) \simeq 6.18 \times 10^6 \text{ cm/s} \simeq 61.8 \text{ km/s}$$

$$t \simeq 2.26 \times 10^6 \text{ s} \simeq 26.1 \text{ dias}$$

★ ★ ★

177. Considere novamente o exercício anterior, mas obtenha seu resultado sem admitir g constante. (a) Mostre que, neste caso, $v(R) \simeq 44 \text{ km/s}$ para a gigante vermelha. (b) Qual é o tempo necessário para o colapso?

Solução:

Neste caso a integral é

$$\int_0^{v(R)} v \, dv = - \int_{r_0}^R g \, dr = - \int_{r_0}^R \frac{G M}{r^2} \, dr$$

$$\frac{v(R)^2}{2} = -G M \int_{r_0}^R r^{-2} \, dr = G M \left[\frac{1}{r} \right]_{r_0}^R = G M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0} \right)$$

$$v(R)^2 = 2 G M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0} \right) = \frac{2 G M}{R} \left(1 - \frac{R}{r_0} \right) = 2 g_*(R) R \left(1 - \frac{R}{r_0} \right)$$

do exercício anterior, com g constante e $r_0 = 2 R$

$$v_c(R)^2 = 2 g(R) R$$

se g não for constante

$$v(R)^2 = 2 g(R) R (1 - 1/2) = g(R) R = \frac{1}{2} v_c(R)^2$$

$$v(R) = \frac{v_c(R)}{\sqrt{2}} = \frac{61.8}{\sqrt{2}} \simeq 44.7 \text{ km/s}$$

(b) Cálculo do tempo de queda livre

Cálculo aproximado

Temos

$$v(r)^2 = 2 G M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (1)$$

considerando uma média para a velocidade tomada em $r = 1.5 R$

$$\bar{v}^2 = 2 G M \left(\frac{2}{3R} - \frac{1}{2R} \right) = \frac{2 G M}{R} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\bar{v}^2 = \frac{G M_*}{3 R} \longrightarrow \bar{v} \simeq 25.2 \text{ km/s}$$

$$t \simeq \frac{R}{\bar{v}} \simeq 2.7 \times 10^6 \text{ s} \simeq 32 \text{ dias}$$

Cálculo correto

Podemos escrever

$$\frac{dv}{dt} = \left| \frac{G M}{r^2} \right|$$

$$r^2 dv = G M dt$$

$$G M t = \int_0^{v(R)} r^2 dv \quad (2)$$

considerando (1) obtemos

$$2 v dv = - \frac{2 G M}{r^2} dr$$

$$r^2 dv = - \frac{G M dr}{v} = - \frac{G M}{\sqrt{2 G M}} \frac{dr}{(1/r - 1/r_0)^{1/2}} \quad (3)$$

(2) e (3)

$$G M t = - \int_{r_0}^R \frac{G M_*}{\sqrt{2 G M}} \frac{dr}{(1/r - 1/r_0)^{1/2}}$$

$$t = - \frac{1}{\sqrt{2 G M}} \int_{r_0}^R \frac{dr}{(1/r - 1/r_0)^{1/2}}$$

com a mudança de variáveis

$$r = \rho R, dr = R d\rho$$

temos $\rho = 2$ para $r = r_0$ e $\rho = 1$ para $r = R$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2 G M}} \int_1^2 \frac{R d\rho}{(1/\rho - 1/2)^{1/2}} \frac{1}{R^{-1/2}}$$

$$t = \frac{R^{3/2}}{\sqrt{2 G M}} \int_1^2 \frac{d\rho}{(1/\rho - 1/2)^{1/2}} = K I$$

onde

$$K = \frac{R^{3/2}}{\sqrt{2 G M}} = \frac{(100 R_\odot)^{3/2}}{\sqrt{2 G M_\odot}} \simeq 1.13 \times 10^6 \text{ s} \simeq 13 \text{ dias}$$

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{(\frac{1}{x} - \frac{1}{2})^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\pi + 2) \simeq 3.64$$

portanto $t \simeq 4.11 \times 10^6 \text{ s} \simeq 47.6 \text{ dias}$ (cf. Maciel 2005)

★ ★ ★

178. Considere a equação de Euler em um envelope circunstelar com simetria esférica e no estado estacionário sob a ação da atração gravitacional g_* e de uma força externa por unidade de massa na mesma direção e sentido inverso ao da força gravitacional. Esta pode ser, por exemplo, devida à transferência de quantidade de movimento do campo de radiação estelar ao gás em um envelope em expansão, caracterizada pela aceleração radiativa g_r . Definindo a gravidade efetiva $g_{ef} = g_* - g_r$ e introduzindo o parâmetro $\Gamma_r = g_r/g_*$, mostre que a equação de Euler pode ser escrita

$$v \frac{dv}{dr} = - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - g_*(1 - \Gamma_r)$$

Solução:

A gravidade efetiva pode ser escrita

$$g_{ef} = g_* - g_r = g_* \left(1 - \frac{g_r}{g_*} \right) = g_* (1 - \Gamma_r)$$

a equação de Euler neste caso é

$$v \frac{dv}{dr} = - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - g_{ef}$$

considerando a relação acima para a gravidade efetiva, temos

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - g_*(1 - \Gamma_r)$$

★ ★ ★

179. Considere a equação de Euler obtida no exercício anterior e mostre que esta equação se reduz à equação de equilíbrio hidrostático no caso de equilíbrio entre a força gravitacional e as forças de pressão, isto é, um envelope estático.

Solução:

Neste caso, $\Gamma_r = 0$ e $v = 0$ de modo que

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -g_* = -\frac{G M}{r^2}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g_* = -\frac{G M_* \rho}{r^2}$$

que é a equação de equilíbrio hidrostático.

★ ★ ★

180. Estime o parâmetro $\Gamma_r = g_r/g_*$ nos envelopes de estrelas quentes de tipos espectrais O e B, considerando o espalhamento por elétrons como fonte de opacidade. Adote $L \sim 10^5$ a $10^6 L_\odot$ e $M \simeq 10$ a $50 M_\odot$ e um coeficiente de espalhamento por elétrons por massa $\kappa_e \simeq 0.30 \text{ cm}^2/\text{g}$.

Solução:

Um fóton com energia $h\nu$ espalhado transporta uma quantidade de movimento $h\nu/c$, de modo que a razão entre as acelerações devidas ao processo de espalhamento e gravitacional é

$$\Gamma_e = \frac{g_e}{g_*} = \frac{L \kappa_e}{4 \pi r^2 c} \frac{r^2}{G M} \simeq \frac{L \kappa_e}{4 \pi c G M}$$

onde L é a luminosidade (erg/s), $L/4\pi r^2$ é o fluxo em r ($\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$), de modo que o termo $L\kappa_e/4\pi r^2 c$ é essencialmente a aceleração (força/massa) devida ao espalhamento por elétrons. Com os valores adotados, obtemos

$$0.05 \leq \Gamma_e \leq 2.3$$

ou seja, nessas estrelas a aceleração devida ao espalhamento por elétrons pode eventualmente dominar a aceleração gravitacional.

★ ★ ★

181. Estime o parâmetro $\Gamma_r = g_r/g_*$ nos envelopes de estrelas gigantes frias, considerando que a contribuição g_r à gravidade efetiva seja devida à ação da radiação

estelar sobre os grãos de poeira imersos no envelope. Adote $a \simeq 1000 \text{ \AA} = 10^{-5} \text{ cm}$ para o raio dos grãos, admitidos esféricos, $s_d \simeq 3 \text{ g/cm}^3$ para sua densidade, adequados a grãos de silicatos, $\rho/\rho_d \simeq 200$ para a razão gás-poeira e valores do fator de eficiência para pressão da radiação no intervalo $0.01 < Q < 1$ e considere uma estrela com $L \simeq 10^3 L_\odot$ e $M \simeq 1 M_\odot$.

Solução:

O coeficiente de espalhamento dos grãos κ_d pode ser escrito

$$\kappa_d \simeq \frac{\pi a^2 Q n_d}{\rho}$$

onde n_d é a densidade numérica de grãos (cm^{-3}), e Q é o fator de eficiência para a pressão da radiação. Em analogia ao exercício anterior, o parâmetro Γ_d devido aos grãos é dado por

$$\Gamma_d \simeq \frac{L \kappa_d}{4 \pi c G M}$$

a massa de um grão com densidade interna s_d é

$$m_d \simeq (4/3) \pi a^3 s_d$$

a densidade numérica de grãos n_d pode ser escrita

$$n_d = \frac{\rho_d}{m_d} = \frac{1}{m_d} \rho \frac{\rho_d}{\rho}$$

$$\frac{n_d}{\rho} = \frac{\rho_d/\rho}{m_d} \simeq \frac{1}{200 m_d}$$

com os valores dados, obtemos

$$m_d \simeq 1.3 \times 10^{-14} \text{ g}$$

$$\frac{n_d}{\rho} \simeq 3.8 \times 10^{11} \text{ g}^{-1}$$

$$\kappa_d \simeq 120 Q \text{ cm}^2/\text{g}$$

o parâmetro Γ fica

$$0.1 < \Gamma_d < 9.2$$

também neste caso os valores da gravidade extra podem ser da ordem ou superiores à gravidade da estrela.

★ ★ ★

182. (a) Considere uma partícula de massa m e velocidade v à distância r do centro de uma estrela de massa M e raio R , e mostre que a velocidade de escape nesta posição é

$$v_e \simeq \sqrt{\frac{2 G M}{r}}$$

(b) Estime a velocidade de escape em uma estrela supergigante de tipo espectral B, adotando $M \simeq 25 M_{\odot}$ e $r \simeq R \simeq 30 R_{\odot}$. Compare seu resultado com as velocidades finais dos ventos destas estrelas, $v_e \simeq 2000 \text{ km/s}$.

Solução:

(a) A velocidade de escape é definida pela condição $E_c = |E_p|$, onde

$E_c = (1/2) m v^2$ é a energia cinética da partícula

$|E_p| = \frac{G M_* m}{r}$ é a energia potencial em r , sendo $r \geq R_*$. Temos então

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{G M m}{r}$$

de onde obtemos

$$v_f \simeq \sqrt{\frac{2 G M}{r}}$$

(b) Com os valores dados

$$v_e \simeq 5.6 \times 10^7 \text{ cm/s} \simeq 560 \text{ km/s}$$

as velocidades terminais são superiores à velocidade de escape, $v_f \gg v_e$.

★ ★ ★

183. (a) Estime a velocidade de escape no caso de uma estrela gigante vermelha com $M \simeq 1 M_{\odot}$ e $R \simeq 100 R_{\odot}$. Compare esta velocidade com a velocidade terminal dos ventos destas estrelas, da ordem de $v_f \simeq 10 \text{ km/s}$. (b) Essas estrelas estão envolvidas por um gigantesco envelope, de modo que a posição r na qual se deve aplicar a condição $E_c = |E_p|$ ocorre a uma distância muito maior do que o raio da estrela. Considere um ponto a cerca de 30 raios estelares e estime a nova velocidade de escape.

Solução:

(a) Usando a velocidade de escape do exercício anterior, obtemos

$$v_e \simeq 6.2 \times 10^6 \text{ cm/s} \simeq 62 \text{ km/s}$$

com $r \simeq R$, isto é, neste caso $v_f < v_e$.

(b) Tomando $r \simeq 30 R$ obtemos $v_e \simeq 1.1 \times 10^6 \text{ cm/s} \simeq 11 \text{ km/s}$, semelhante à velocidade terminal do vento.

★ ★ ★

184. Estrelas quentes de tipos espectrais O, B e temperaturas efetivas acima de 21000 K apresentam uma razão entre a velocidade terminal do vento v_f e a velocidade de escape efetiva v_e dada por $v_f/v_e \simeq 2.6$, sendo

$$v_e = \sqrt{\frac{2(1 - \Gamma_e) G M}{R}}$$

A estrela ζ Pup tem tipo espectral O4f, temperatura efetiva $T_{ef} \simeq 42000$ K, massa $M \simeq 60 M_{\odot}$, raio $R \simeq 20 R_{\odot}$ e um vento com velocidade terminal $v_f \simeq 2200$ km/s. (a) Qual é o valor médio do parâmetro Γ_e da estrela, definido como a razão entre a gravidade devida ao espalhamento por elétrons e a aceleração gravitacional da estrela? (b) Considerando que a luminosidade total da estrela é $L \simeq 8 \times 10^5 L_{\odot}$, qual é o coeficiente de espalhamento eletrônico (cm^2/g) no envelope estelar?

Solução:

(a) Como $v_f/v_e \simeq 2.6$ temos

$$v_e \simeq \frac{v_f}{2.6} \simeq \frac{2200}{2.6} \simeq 846 \text{ km/s}$$

da relação

$$v_e = \sqrt{\frac{2(1 - \Gamma_e) G M}{R}}$$

$$\Gamma_e = 1 - \frac{v_e^2 R}{2 G M}$$

com os valores de R e M , temos $\Gamma_e \simeq 0.37$

(b) O parâmetro Γ é dado por (ver Exercício 180)

$$\Gamma_e = \frac{\kappa_e L}{4 \pi c G M}$$

portanto

$$\kappa_e = \frac{4 \pi c G M_* \Gamma_e}{L_*} \simeq 0.36 \text{ cm}^2/\text{g}$$

★ ★ ★

185. Considere um vento estelar em que o termo gravitacional da equação de Euler é desprezível, isto é, o gás é acelerado em um envelope de espessura Δr para fora da estrela pelas forças de pressão. Estime a velocidade final no envelope de uma estrela gigante vermelha com uma temperatura $T \simeq 10^3$ K.

Solução:

A equação de Euler fica

$$v \frac{dv}{dr} \simeq -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}$$

considerando uma aceleração média dada por

$$a \simeq \frac{1}{\rho} \left| \frac{dP}{dr} \right|$$

o gás é acelerado até atingir a velocidade final

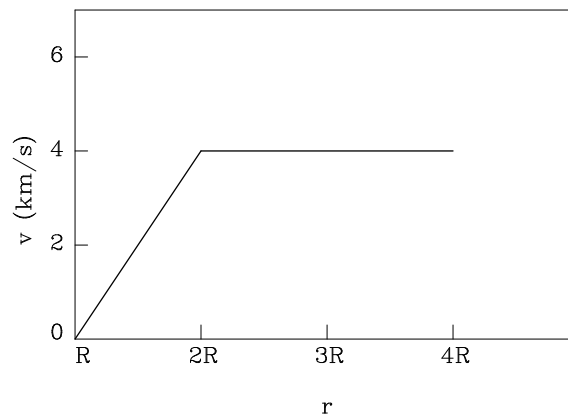
$$v_f^2 \simeq 2 \left| \frac{dP}{dr} \right| \frac{\Delta r}{\rho}$$

a velocidade pode ser estimada usando a equação de estado

$$v_f^2 \simeq 2 \frac{P}{\rho} \simeq 2 \frac{k T}{m_H}$$

com $T \simeq 10^3$, obtemos $v_f \simeq 4$ km/s.

O comportamento de $v(r)$ é mostrado pela figura abaixo para $\Delta r \simeq R$.



★ ★ ★

186. Uma aplicação do caso em que a atração gravitacional não é importante (ver exercício anterior) ocorre nas nebulosas planetárias, em que o envelope expande-se com velocidade aproximadamente constante em regiões muito distantes da estrela central. Mostre que a energia cinética de um próton a uma distância $r \simeq 0.2$ pc da estrela é superior à sua energia potencial, de modo que o próton escapa da estrela. Mostre que sua velocidade é então superior à velocidade de escape nesta posição. Considere um estrela com $M \simeq 1 M_\odot$ e uma velocidade de expansão $v \simeq 20$ km/s.

Solução:

A energia potencial do próton é

$$|E_p| \simeq G M \frac{m_p}{r} \simeq 3.6 \times 10^{-16} \text{ erg}$$

com $v \simeq 20$ km/s, a energia cinética do próton é

$$E_c \simeq (1/2) m_p v^2 \simeq 3.3 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

portanto $E_c \gg |E_p|$, de modo que o envelope escapa da estrela.

A velocidade de escape do gás é

$$v_e \simeq \sqrt{\frac{2 G M}{r}} \simeq 2.1 \times 10^4 \text{ cm/s} \simeq 0.2 \text{ km/s} \longrightarrow v \gg v_e$$

★ ★ ★

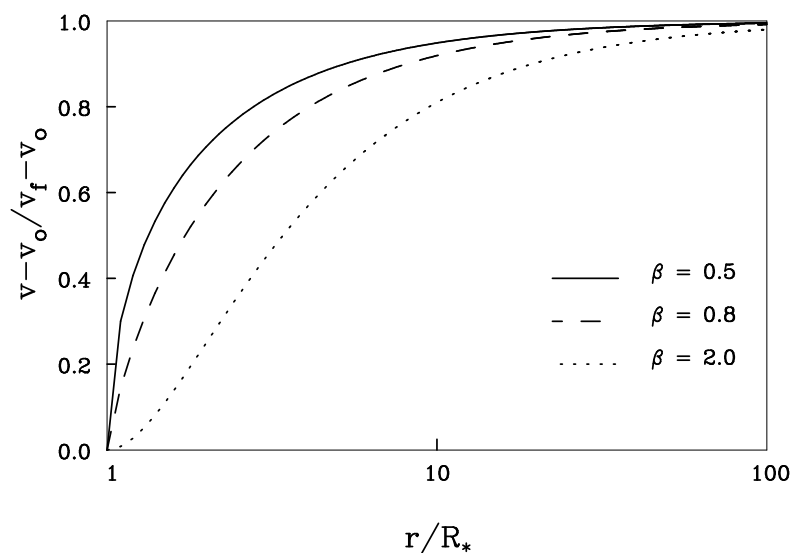
187. A variação da velocidade de um vento estelar com a distância da atmosfera da estrela $v(r)$ é chamada uma *lei de velocidade*. Uma relação aproximada é a *lei beta*, que pode ser escrita

$$v(r) = v_0 + (v_f - v_0) \left(1 - \frac{R}{r}\right)^\beta$$

onde v_0 é a velocidade inicial do vento, v_f é a velocidade final ($v_f \gg v_0$), R é um nível de referência, geralmente da ordem do raio da estrela R_* , e β é um parâmetro que caracteriza a aceleração no envelope. Faça um gráfico da lei beta nos casos em que $\beta \simeq 0.5$ e $\beta \simeq 0.8$, apropriados para estrelas quentes e $\beta \simeq 2$, apropriado para estrelas frias. O que ocorre para $r \rightarrow R$ e para $r \rightarrow \infty$?

Solução:

O gráfico está na figura abaixo



Para $r \rightarrow R$ temos $v \rightarrow v_0$, e para $r \rightarrow \infty$ temos $v \rightarrow v_f$. (cf. Maciel 2005)

★ ★ ★

188. Considere a equação de Euler aplicada a uma estrela sob a ação apenas das forças de pressão e da força gravitacional. Suponha que a estrela está em equilíbrio e que a força gravitacional pode ser derivada de um potencial na forma $\vec{F} = \rho \vec{g} = -\rho \vec{\nabla} \phi$, o qual satisfaz a equação de Poisson. Neste caso, mostre que a equação de Euler pode ser escrita

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \right) = -4\pi G \rho$$

Solução:

Considerando a equação de Euler na forma vetorial

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{g}$$

com $\vec{v} = 0$, obtemos

$$\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P = \vec{g} = -\vec{\nabla} \phi$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \right) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = -\nabla^2 \phi$$

usando a equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4 \pi G \rho$$

obtemos a equação de Euler na forma solicitada.

★ ★ ★

189. Considere uma lei beta de velocidades para um vento estelar em que o nível de referência R esteja relacionado com o raio R_* da estrela por

$$R = R_* \left[1 - \left(\frac{v_0}{v_f} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]$$

(a) Qual é o valor de R , em termos do raio da estrela, para uma estrela quente de tipo espectral O, cuja temperatura efetiva é $T_{ef} = 40000$ K, com um vento de velocidade terminal de 2500 km/s e $\beta = 0.8$? Suponha que a velocidade inicial do vento seja essencialmente igual à velocidade do som na base do envelope circunscritar, $v_0^2 \simeq c_s^2 \simeq k T_{ef} / \mu m_H$, onde $\mu \simeq 0.6$ é o peso molecular médio das partículas do gás. (b) Use a lei beta do Exercício 187 e faça um gráfico de $v(r)$ em função de r/R_* . A que distância da estrela, em termos de R_* , o vento alcança 60% da velocidade terminal?

Solução:

$$(a) v_0^2 = \frac{k T_{ef}}{\mu m_H} \simeq 5.51 \times 10^{12} \text{ cm/s}^2$$

$$v_0 = 23.5 \text{ km/s}$$

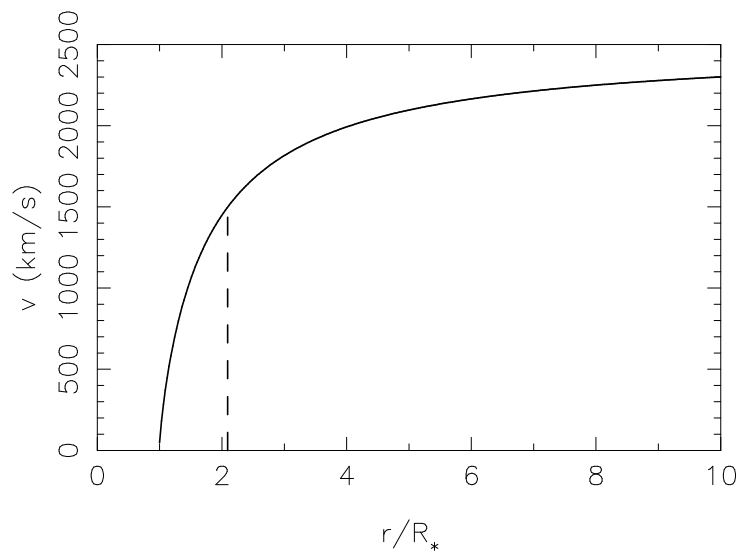
$$\frac{R}{R_*} = \left[1 - \left(\frac{v_0}{v_f} \right)^{1/\beta} \right] \simeq 0.997$$

$$(b) v(r) \simeq 23.5 + (2500 - 23.5) \left(1 - \frac{R/R_*}{r/R_*} \right)^{0.8}$$

$$(0.60)(2500) \simeq 23.5 + (2500 - 23.5) \left(1 - \frac{0.997}{r_{60}/R_*}\right)^{0.8}$$

$$\left(1 - \frac{0.997}{r_{60}/R_*}\right)^{0.8} \simeq 0.596$$

$$\frac{r_{60}}{R_*} \simeq 2.09$$



★ ★ ★

190. Uma estrela de tipo espectral O4, temperatura efetiva $T_{ef} = 40000$ K e raio $R = 15 R_{\odot}$ tem uma lei de velocidades dada por

$$\frac{v(r)}{v_f} = \left[1 - \frac{0.9983 R}{r}\right]^{0.83}$$

a qual se ajusta ao perfil de um vento impulsionado pela radiação em linhas espectrais, levando em conta o disco finito da estrela. Suponha que o vento se inicie em $r/R \simeq 1$ e que a velocidade inicial é igual à metade da velocidade térmica média dos prótons na fotosfera da estrela. (a) Qual é a velocidade terminal do vento? (b) Qual deve ser a taxa de perda de massa da estrela? Considere uma relação aproximada dada por $\log \dot{M} \simeq 1.75 \log L/L_{\odot} - 15.48$, onde a taxa está em $M_{\odot}/\text{ano}$. (c) Supondo que a eficiência para para transferência de quantidade de movimento da estrela para o vento seja $\eta \simeq N_{ef}(v_f/c) \simeq 0.4$, qual deve ser, aproximadamente, o número efetivo N_{ef} de linhas necessárias para impulsionar o vento?

Solução:

(a) A velocidade inicial é

$$v_0 = \frac{v_t}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 k T_{ef}}{m_H}} = 1.29 \times 10^6 \text{ cm/s} = 12.9 \text{ km/s}$$

com a relação dada

$$v_0 = v_f \left[1 - 0.9983 \right]^{0.83} = 5.03 \times 10^{-3} v_f$$

$$v_f = 2.57 \times 10^8 \text{ cm/s} = 2570 \text{ km/s}$$

(b) A luminosidade da estrela é

$$L = 4 \pi R^2 \sigma T_{ef}^4 = 1.99 \times 10^{39} \text{ erg/s} = 5.16 \times 10^5 L_\odot$$

$$\log L/L_\odot = 5.71$$

$$\text{portanto } \log \dot{M} = -5.49, \quad \dot{M} = 3.25 \times 10^{-6} M_\odot/\text{ano}$$

(c) O número efetivo de linhas é

$$N_{ef} \simeq \frac{\eta}{(v_f/c)} \simeq 47$$

★ ★ ★

191. Considere a equação de Euler sem forças externas na notação vetorial e obtenha esta equação na notação tensorial cartesiana (cf. Maciel 2005).

Solução: A equação de Euler na notação vetorial é

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P$$

neste caso obtemos

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

que é a equação de Euler sem forças externas em notação tensorial cartesiana. Usando a expressão

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

esta relação pode ser escrita

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} &= \left(-\frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \left(\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

usando a equação de continuidade (Exercício 156), obtemos

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = - \left[\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k} \right]$$

que é uma forma alternativa da equação de Euler sem forças externas. Esta equação pode ainda ser simplificada definindo o tensor do fluxo de quantidade de movimento Π_{ik} por

$$\Pi_{ik} = P \delta_{ik} + \rho v_i v_k$$

com unidades de Π_{ik} : dina/cm² = (g cm s⁻²) cm⁻² = (g cm s⁻¹) cm⁻² s⁻¹, ou seja, unidades de quantidade de movimento por unidade de área e por unidade de tempo. Podemos verificar que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} &= \frac{\partial (P \delta_{ik} + \rho v_i v_k)}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial (P \delta_{ik})}{\partial x_k} + \frac{\partial (\rho v_i v_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial (\rho v_i v_k)}{\partial x_k} \end{aligned}$$

de modo que a equação de Euler sem forças externas fica

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}$$

★ ★ ★

192. Escreva a equação de Euler na forma tensorial cartesiana incluindo uma força externa $\vec{F}$ (dina/cm³).

Solução:

Neste caso, a equação de Euler na forma vetorial é

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \frac{1}{\rho} \vec{F}$$

usando a notação tensorial temos

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} F_i$$

com o mesmo raciocínio do exercício anterior, esta equação também ser escrita

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} + F_i$$

o tensor Π_{ik} é um tensor de segunda ordem, e o termo $\partial \Pi_{ik} / \partial x_k$, divergência de Π_{ik} , é um tensor de primeira ordem, ou um vetor, como a força F_i .

★ ★ ★

193. Considerando um gás composto de partículas de diferentes espécies, podemos definir o tensor do fluxo de quantidade de movimento Π_{ik}^s para uma partícula de tipo s , com massa m_s e densidade numérica n_s . Admitindo que o gás é homogêneo

com equipartição de energia, de modo que todas as espécies de partículas têm uma mesma distribuição de velocidades, considerada isotrópica e caracterizada por uma mesma temperatura, mostre que o fluxo de quantidade de movimento de todos os tipos de partículas é ainda dado por

$$\Pi_{ik} = P\delta_{ik} + \rho v_i v_k$$

Solução:

Nas condições acima, o tensor do fluxo de quantidade de movimento para as partículas de tipo i é

$$\Pi_{ik}^s = (n_s kT) \delta_{ik} + m_s n_s v_i v_k = P_s \delta_{ik} + m_s n_s v_i v_k$$

o tensor do fluxo de quantidade de movimento total é

$$\Pi_{ik} = (\sum_s P_s) \delta_{ik} + (\sum_s m_s n_s) v_i v_k$$

ou seja

$$\Pi_{ik} = P\delta_{ik} + \rho v_i v_k$$

onde P_s é a pressão parcial da espécie s e P a pressão total do gás

★ ★ ★

194. Considere um fluido viscoso com um coeficiente de viscosidade dinâmica η , em um escoamento caracterizado pela velocidade v , densidade ρ e dimensão linear L . Mostre que o único número adimensional que pode ser formado com essas quatro propriedades é dado por

$$R = \frac{v L \rho}{\eta}$$

Este é o *número de Reynolds*, essencialmente uma medida da razão entre as forças inerciais e viscosas que atuam no fluido. Valores baixos de R estão associados a escoamentos laminares, em que as perturbações introduzidas são rapidamente amortecidas, enquanto que valores altos de R aplicam-se a fluxos turbulentos.

Solução:

Em termos dimensionais temos

$$v \longrightarrow L/T \quad \rho \longrightarrow M/L^3 \quad \eta \longrightarrow M/LT$$

$$\frac{v}{\eta} = \frac{L}{T} \frac{L T}{M} = \frac{L^2}{M}$$

$$\frac{v \rho}{\eta} = \frac{L^2}{M} \frac{M}{L^3} = \frac{1}{L}$$

portanto

$$\frac{v L \rho}{\eta} = R$$

R é um número adimensional

★ ★ ★

EXPANSÃO DE GASES PERFEITOS

195. (a) Calcule o peso molecular de um gás composto de hidrogênio ionizado, com 10% de He uma vez ionizado, isto é, $n_{HeII}/n_{HII} = 0.10$. (b) Qual é o valor do peso molecular se o He estiver duas vezes ionizado?

Solução:

$$(a) \frac{n_{HeII}}{n_{HII}} = 0.10$$

$$n_e = n_{HII} + n_{HeII}$$

$$\mu \simeq \frac{1}{m_H} \frac{n_{HII}m_H + n_e m_e + n_{HeII}m_{He}}{n_{HII} + n_e + n_{HeII}} \simeq \frac{1 + 4(n_{HeII}/n_{HII})}{2(1 + n_{HeII}/n_{HII})}$$

$$\mu \simeq \frac{1.4}{2.2} = 0.64$$

$$(b) \frac{n_{HeIII}}{n_{HII}} = 0.10$$

$$n_e = n_{HII} + 2n_{HeIII}$$

$$\mu \simeq \frac{1}{m_H} \frac{n_{HII}m_H + n_e m_e + n_{HeIII}m_{He}}{n_{HII} + n_e + n_{HeIII}} \simeq \frac{1 + 4(n_{HeIII}/n_{HII})}{2 + 3(n_{HeIII}/n_{HII})}$$

$$\mu \simeq \frac{1.4}{2.3} = 0.61$$

★ ★ ★

196. Calcule o peso molecular de um gás contendo H e H₂ a 50%.

Solução:

$$n_H = n_{H_2}$$

$$\mu \simeq \frac{1}{m_H} \frac{n_H m_H + n_{H_2} m_{H_2}}{n_H + n_{H_2}} \simeq \frac{1 + 2(n_{H_2}/n_H)}{1 + (n_{H_2}/n_H)} = 1.50$$

★ ★ ★

197. Calcule o peso molecular de um gás contendo quantidades iguais de H e H₂ e cerca de 10% de He relativo ao H.

Solução:

$$\mu = \frac{1}{m_H} \frac{n_H m_H + 4 n_{He} m_H + 2 n_{H_2} m_H}{n_H + n_{He} + n_{H_2}}$$

$$n_H = n_{H_2}, \quad n_{He}/n_H = 0.10$$

$$\mu = \frac{n_H + 4 n_{He} + 2 n_H}{2 n_H + n_{He}} = \frac{3 n_H + 4 n_{He}}{2 n_H + n_{He}}$$

$$\mu = \frac{3 + 4 (n_{He}/n_H)}{2 + (n_{He}/n_H)} = \frac{3 + 4 \times 0.1}{2 + 0.1} = \frac{3.4}{2.1} = 1.62$$

★ ★ ★

198. Uma nebulosa planetária composta de gás ionizado de H e He a 10% tem temperatura eletrônica $T_e = 10^4$ K e densidade eletrônica $n_e = 10^4 \text{ cm}^{-3}$. (a) Qual é a pressão média na nebulosa? (b) Admitindo que a nebulosa esteja se expandindo com uma velocidade de 20 km/s, qual é o fluxo de massa transmitido ao meio interestelar? (c) Considerando que a nebulosa tem um diâmetro angular de 1 minuto de arco e está situada a 2 kpc do Sol, qual é sua idade, considerada igual à escala de tempo de expansão?

Solução:

$$(a) P = n k T = (10^4) (1.38 \times 10^{-16}) (10^4) = 1.38 \times 10^{-8} \text{ dina/cm}^2$$

(b) Com o resultado do Exercício 195 temos

$$\rho = n \mu m_H \simeq (10^4) (0.64) (1.67 \times 10^{-24}) = 1.07 \times 10^{-20} \text{ g/cm}^3$$

$$\rho v = (1.07 \times 10^{-20}) (20 \times 10^5) = 2.14 \times 10^{-14} \text{ g cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

(c) O raio angular α da nebulosa é

$$\alpha = 30'' = 1.45 \times 10^{-4} \text{ rad} = \frac{R}{d}$$

onde R é o raio e d a distância. Temos

$$R = (1.45 \times 10^{-4}) (2000) = 0.29 \text{ pc} = 9.0 \times 10^{17} \text{ cm}$$

$$\tau \simeq \frac{R}{v} \simeq \frac{9.0 \times 10^{17}}{20 \times 10^5} \simeq 4.5 \times 10^{11} \text{ s} \simeq 14000 \text{ anos}$$

★ ★ ★

199. Uma estrela gigante vermelha com tipo espectral M5III tem massa igual a $1 M_\odot$, temperatura efetiva de 3000 K e gravidade superficial (cm/s^2) dada por $\log g = 1.0$. Um modelo para sua atmosfera resulta na pressão total (dina/cm^2) $\log P = 3.5$ em uma região onde a temperatura é dada essencialmente pela temperatura efetiva. (a) Qual é a densidade nesta região, se o peso molecular da atmosfera é $\mu = 1.3$? (b) A estrela tem um envelope circunstelar com $T = 10^3$ K

a cerca de 5 raios estelares do centro, e o gás escapa com uma velocidade de 20 km/s a uma taxa de perda de massa de $10^{-6} M_{\odot}/\text{ano}$. Qual é a pressão média no envelope? Compare seu resultado com a pressão típica na atmosfera da estrela.

Solução:

$$(a) P_0 = \frac{k \rho_0 T_0}{\mu m_H} = 10^{3.5} = 3.16 \times 10^3 \text{ dina/cm}^2$$

$$\rho_0 = \frac{\mu m_H P_0}{k T_0}$$

$$\rho_0 = \frac{(1.3)(1.67 \times 10^{-24})(3.16 \times 10^3)}{(1.38 \times 10^{-16})(3000)} = 1.66 \times 10^{-8} \text{ g/cm}^3$$

$$n_0 = \frac{\rho_0}{\mu m_H} = 7.65 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$$

$$(b) g = \frac{G M}{R^2}$$

$$R = \sqrt{\frac{G M}{g}} = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-8})(1.99 \times 10^{33})}{10}} = 3.64 \times 10^{12} \text{ cm} \simeq 52 R_{\odot}$$

$$\frac{dM}{dt} = 4 \pi r^2 \rho v$$

$$\rho = \frac{dM/dt}{4 \pi r^2 v} = \frac{(10^{-6})(1.99 \times 10^{33})}{(3.16 \times 10^7)(4\pi)(25)(3.64 \times 10^{12})^2(20 \times 10^5)}$$

$$\rho = 7.56 \times 10^{-15} \text{ g/cm}^3$$

$$n = 3.48 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$$

$$P = \frac{k \rho T}{\mu m_H} = \frac{(1.38 \times 10^{-16})(7.56 \times 10^{-15})(10^3)}{(1.3)(1.67 \times 10^{-24})} = 4.81 \times 10^{-4} \text{ dina/cm}^2$$

$$\frac{P_0}{P} = \frac{3.16 \times 10^3}{4.81 \times 10^{-4}} = 6.57 \times 10^6$$

★ ★ ★

200. A temperatura das camadas fotosféricas de uma estrela com $T_{ef} = 20000 \text{ K}$ aumenta cerca de 50% da superfície da estrela até a região caracterizada por sua temperatura efetiva. (a) Considerando que a densidade na fotosfera varia de $2.0 \times 10^{-11} \text{ g/cm}^3$ até $9.0 \times 10^{-10} \text{ g/cm}^3$ na mesma região, qual é a variação esperada para a pressão do gás? Considere $\mu = 1.0$. (b) Considerando que a pressão é devida essencialmente aos elétrons, qual é a variação da densidade eletrônica nessa região?

Solução:

(a) Usando o índice “1” para a superfície da estrela, temos

$$T_1 = \frac{T_{ef}}{1.5} \simeq 13300 \text{ K}$$

$$\rho_1 = 2 \times 10^{-11} \text{ g/cm}^3$$

a pressão na superfície é

$$P_1 = \frac{k \rho_1 T_1}{\mu m_H} = \frac{(1.38 \times 10^{-16})(2 \times 10^{-11})(13300)}{1.67 \times 10^{-24}} = 22.0 \text{ dina/cm}^2$$

na região onde $T = T_2 = T_{ef}$

$$P_2 = \frac{k \rho_2 T_2}{\mu m_H} = \frac{(1.38 \times 10^{-16})(9 \times 10^{-10})(20000)}{1.67 \times 10^{-24}} = 1490.0 \text{ dina/cm}^2$$

$$(b) \frac{n_e}{n_{e1}} = \frac{\rho}{\rho_1} = 45$$

$$n_{e1} = \frac{\rho_1}{m_H} = 1.20 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$$

$$n_{e2} = \frac{\rho_2}{m_H} = 5.39 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$$

★ ★ ★

201. Mostre que, para um gás perfeito com peso molecular μ caracterizado pelos calores específicos c_P e c_V podemos escrever as relações

$$c_P = c_V + \frac{\mathcal{R}}{\mu}$$

$$\gamma = 1 + \frac{\mathcal{R}}{\mu c_V}$$

onde $\mathcal{R} = 8.31 \times 10^7 \text{ erg mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ é a constante dos gases.

Solução:

Da equação de estado

$$P V = \frac{\nu \mathcal{R} T}{\mu}$$

onde ν é o número de moles. Para P constante temos

$$P dV = \frac{\nu \mathcal{R}}{\mu} dT$$

da primeira lei da Termodinâmica

$$dQ = \nu c_V dT + \frac{\nu \mathcal{R}}{\mu} dT$$

portanto

$$c_P = \left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P = c_V + \frac{\mathcal{R}}{\mu}$$

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{c_V + \mathcal{R}/\mu}{c_V} = 1 + \frac{\mathcal{R}}{\mu c_V}$$

★ ★ ★

202. Considere uma expansão isotérmica em um gás perfeito e mostre que a velocidade do som é dada por

$$c_s^2 = \frac{P}{\rho}$$

Solução:

A velocidade do som é

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T$$

como a temperatura é constante, equação de energia é simplesmente

$$T = \text{constante}$$

usando a equação de estado dos gases perfeitos

$$P = \frac{k \rho T}{\mu m_H}$$

admitindo μ constante, obtemos

$$c_s^2 = \frac{k T}{\mu m_H} = \frac{P}{\rho}$$

★ ★ ★

203. Considere uma expansão adiabática em um gás perfeito e mostre que a velocidade do som é dada por

$$c_s^2 = \gamma \frac{P}{\rho} = \frac{\gamma k T}{\mu m_H}$$

Solução:

A velocidade do som neste caso é

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_A$$

podemos substituir a equação de energia por uma relação do tipo

$$P = \text{constante} \times \rho^\gamma$$

onde $\gamma = c_P/c_V$ é a razão dos calores específicos. Portanto,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_A = \gamma \frac{P}{\rho}$$

$$c_s^2 = \gamma \frac{P}{\rho}$$

considerando a equação de estado podemos escrever

$$c_s^2 = \frac{\gamma k T}{\mu m_H}$$

★ ★ ★

204. Mostre que, para um gás ideal e monoatômico em uma expansão adiabática, temos $d \ln P / d \ln \rho = 5/3$.

Solução:

$$dQ = dE + PdV = \frac{dE}{dT} dT + P dV$$

$$c_V = \left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{\nu} \frac{dE}{dT}$$

$$c_P = \left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P$$

$$P = \frac{\nu \mathcal{R} T}{V}$$

onde novamente ν é o número de moles e $\mathcal{R}$ a constante dos gases.

Podemos escrever

$$dQ = \nu c_V dT + \frac{\nu \mathcal{R} T}{V} dV = 0$$

$$\frac{dT}{T} + \frac{\mathcal{R}}{c_V} \frac{dV}{V} = 0$$

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = 1 + \frac{\mathcal{R}}{c_V} \longrightarrow \frac{\mathcal{R}}{c_V} = \gamma - 1$$

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0$$

$$P \propto \frac{T}{V} \longrightarrow \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V}$$

$$\frac{dP}{P} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V} - \frac{dV}{V} = -\gamma \frac{dV}{V}$$

$$\rho \propto \frac{1}{V} \longrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V}$$

$$\frac{dP}{P} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\frac{d \log P}{d \log \rho} = \frac{d \ln P}{d \ln \rho} = \gamma = 5/3$$

★ ★ ★

205. Mostre que, para uma expansão adiabática em um gás perfeito e monoatômico, $(dT/dP)_{ad} = (2/5) T/P$.

Solução:

Para um gás perfeito $P \propto \rho T$

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$$

$$\frac{dT}{dP} = \frac{T}{P} - \frac{T}{\rho} \frac{d\rho}{dP}$$

para expansão adiabática

$$P = k \rho^{5/3}$$

$$dP = \frac{5}{3} k \rho^{2/3} d\rho = \frac{5}{3} \frac{P}{\rho} d\rho$$

$$\left(\frac{d\rho}{dP} \right)_{ad} = \frac{3}{5} \frac{\rho}{P}$$

$$\left(\frac{dT}{dP} \right)_{ad} = \frac{T}{P} - \frac{3}{5} \frac{T}{P} = \frac{2}{5} \frac{T}{P}$$

★ ★ ★

206. A partir da expressão $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$, válida para uma expansão adiabática, obtenha todas as relações semelhantes possíveis envolvendo P, ρ, V e T . Escreva essas expressões também na forma diferencial.

Solução:

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante} \quad \longrightarrow \quad \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0$$

$$\rho \propto V^{-1} \quad \longrightarrow \quad \frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}$$

$$T \rho^{1-\gamma} = \text{constante} \quad \longrightarrow \quad \frac{dT}{T} + (1 - \gamma) \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

$$T P^{\frac{1}{\gamma}-1} = \text{constante} \quad \longrightarrow \quad \frac{dT}{T} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{dP}{P} = 0$$

$$P V^\gamma = \text{constante} \quad \longrightarrow \quad \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

$$P \rho^{-\gamma} = \text{constante} \quad \longrightarrow \quad \frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

★ ★ ★

207. Mostre que a relação entre os 3 expoentes adiabáticos Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 é

$$\Gamma_3 - 1 = \frac{\Gamma_1(\Gamma_2 - 1)}{\Gamma_2}$$

Solução:

Usando a definição dos expoentes adiabáticos

$$\frac{dT}{T} + (\Gamma_3 - 1) \frac{dV}{V} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{\Gamma_2}{1 - \Gamma_2} \frac{dT}{T} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dP}{P} + \Gamma_1 \frac{dV}{V} = 0 \quad (3)$$

por exemplo, de (3)

$$\frac{dP}{P} = -\Gamma_1 \frac{dV}{V}$$

usando (2)

$$\frac{\Gamma_2}{1 - \Gamma_2} \frac{dT}{T} = \Gamma_1 \frac{dV}{V}$$

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} \frac{dT}{T} = -\Gamma_1 \frac{dV}{V}$$

desta relação e (1)

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} (\Gamma_3 - 1) \frac{dV}{V} = \Gamma_1 \frac{dV}{V}$$

ou seja

$$\Gamma_3 - 1 = \frac{\Gamma_1(\Gamma_2 - 1)}{\Gamma_2}$$

★ ★ ★

208. Vamos considerar a equação de energia em um escoamento estacionário unidimensional esfericamente simétrico, desprezando a condução eletrônica e concentrando em Q ($\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$) a taxa de energia total depositada por processos como

a deposição de energia acústica, etc. O sistema está sujeito à força gravitacional da estrela central de massa M , dada por $\vec{v} \cdot \vec{F} = \rho \vec{v} \cdot \vec{g} = -\rho v (GM/r^2)$. Nesse caso, a equação de energia é

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \rho v (v^2/2 + e + P/\rho) \right] = -\rho v \frac{GM}{r^2} + Q \quad (1)$$

onde e é a energia interna por unidade de massa. (a) Mostre que esta equação pode ser colocada na forma

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{v^2}{2} + e + \frac{P}{\rho} - \frac{GM}{r} \right) = \frac{4\pi r^2 Q}{\dot{M}} \quad (2)$$

que é a *equação de Bernoulli*. (b) Obtenha a equação equivalente para o caso de uma força externa adicional F (dina/cm³) além da força gravitacional.

Solução:

(a) Multiplicando a equação (1) por r^2 e considerando um fluxo estacionário,

$$r^2 \rho v = \frac{\dot{M}}{4\pi} = \text{constante}$$

de modo que

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{\dot{M}}{4\pi} \left(\frac{v^2}{2} + e + \frac{P}{\rho} \right) \right] = -\rho v GM + r^2 Q$$

$$\frac{\dot{M}}{4\pi} \frac{d}{dr} \left(\frac{v^2}{2} + e + \frac{P}{\rho} \right) = -\rho v GM + r^2 Q$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{v^2}{2} + e + \frac{P}{\rho} \right) = -\frac{4\pi GM \rho v}{\dot{M}} + \frac{4\pi r^2 Q}{\dot{M}}$$

mas

$$\frac{d}{dr} \left(-\frac{GM}{r} \right) = \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{r^2} \frac{4\pi r^2 \rho v}{\dot{M}} = \frac{4\pi GM \rho v}{\dot{M}}$$

portanto obtemos a equação (2). Q é a taxa de deposição de energia por unidade de volume (erg cm⁻³ s⁻¹), e o termo $4\pi r^2 Q/\dot{M}$ representa o gradiente de energia depositada por unidade de massa (erg g⁻¹ cm⁻¹).

(b) Neste caso a equação (1) fica

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \rho v \left(\frac{v^2}{2} + e + \frac{P}{\rho} \right) \right] = -\rho v \frac{GM}{r^2} + v F + Q$$

com o mesmo procedimento anterior obtemos

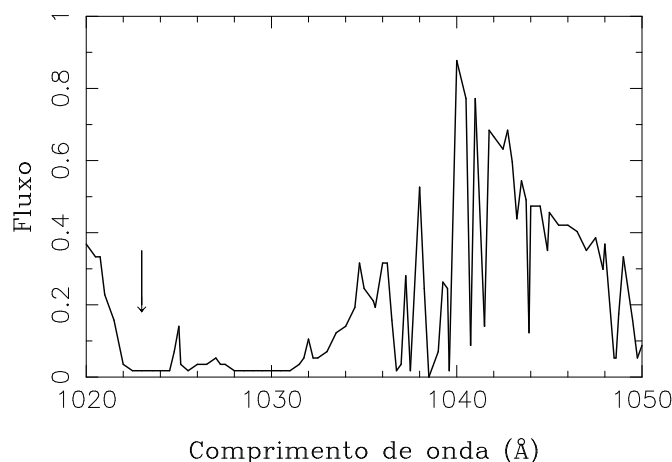
$$\frac{d}{dr} \left(\frac{v^2}{2} + e + \frac{P}{\rho} - \frac{GM}{r} \right) = \frac{4\pi r^2 Q}{\dot{M}} + \frac{4\pi r^2 v F}{4\pi r^2 \rho v}$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{v^2}{2} + e + \frac{P}{\rho} - \frac{GM}{r} \right) = \frac{4\pi r^2 Q}{\dot{M}} + \frac{F}{\rho}$$

★ ★ ★

VENTOS ESTELARES E DINÂMICA

209. A figura abaixo mostra o espectro da estrela central da nebulosa planetária NGC 7009, obtido com o *Far Ultraviolet Explorer* (FUSE, Iping & Sonneborn 2003). Observe o intenso perfil P Cygni do dubleto 1032/1038 Å do OVI. Supondo que a maior parte do perfil observado seja determinada pela linha mais intensa do dubleto, cujo comprimento de onda de repouso é $\lambda_0 = 1031.928$ Å, estime a velocidade terminal do vento desta estrela.



Solução:

Da figura o comprimento de onda limite é $\lambda \simeq 1023$ Å.

A velocidade é então

$$v_f = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 3 \times 10^{10} \frac{1023 - 1031.928}{1031.928} \simeq -2600 \text{ km/s}$$

★ ★ ★

210. Considere um vento estelar propagando-se com uma velocidade terminal v_f e taxa de perda de massa $dM/dt = \dot{M}$. (a) Qual é energia cinética por unidade de massa do vento? (b) Qual é a energia cinética depositada no meio interestelar por unidade de tempo? (c) Considerando que o vento age durante um intervalo de tempo Δt , qual é a energia cinética total depositada no meio interestelar? (d) Considere o caso de uma estrela quente com $v_f \simeq 2000$ km/s, $\dot{M} \simeq 10^{-5} M_\odot/\text{ano}$, e que o estágio correspondente da evolução da estrela tem uma duração $\Delta t \sim 10^5$ anos. Qual é a taxa de deposição de energia cinética? Qual é a energia total depositada pela estrela? Compare este resultado com a energia total envolvida em uma explosão de supernova de tipo II, da ordem de 10^{49} a 10^{51} erg. (e) Repita os cálculos no caso de uma estrela gigante fria, adotando $\dot{M} \sim 10^{-6} M_\odot/\text{ano}$, $v_f \simeq 10$ km/s, e $\Delta t \simeq 10^6$ anos. Compare esta energia com a energia produzida na explosão de uma nova, da ordem de 10^{43} a 10^{44} erg.

Solução:

(a) A energia cinética por unidade de massa do vento é

$$E_c/M \sim (1/2) v_f^2$$

(b) Pela conservação da energia, a energia cinética depositada no meio interestelar por unidade de tempo é

$$E_c/t \sim (1/2) \dot{M} v_f^2$$

(c) A energia cinética total depositada no meio interestelar é

$$E_c \sim (1/2) \dot{M} v_f^2 \Delta t$$

(d) Para esta estrela a taxa de deposição de energia cinética é

$$E_c/t \sim 1.3 \times 10^{37} \text{ erg/s}$$

a energia total depositada é

$$E_c \sim 4.0 \times 10^{49} \text{ erg}$$

Os valores são menores ou da ordem do valor associado com a supernova.

(e) Para a gigante fria

$$E_c/t \sim 3.1 \times 10^{31} \text{ erg/s}$$

$$E_c \sim 9.9 \times 10^{44} \text{ erg}$$

Esta energia é da ordem ou maior que a energia da explosão de uma nova.

★ ★ ★

211. Considere um vento estelar isotérmico, esfericamente simétrico e estacionário (independente do tempo), onde a força dirigida para fora da estrela é devida essencialmente à pressão do gás. Mostre que a equação da conservação da quantidade de movimento pode ser escrita (cf. Maciel 2005)

$$\frac{r}{v} \frac{dv}{dr} = \frac{\Delta}{v^2 - c_s^2}$$

com

$$\Delta = 2 c_s^2 - \frac{G M}{r}$$

onde $c_s = \sqrt{kT/\mu m_H}$ é a velocidade do som no meio.

Solução:

A equação de continuidade pode ser escrita

$$\frac{dM}{dt} = 4 \pi r^2 \rho v$$

e a equação do movimento é

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0$$

a equação de energia é simplesmente

$$T = \text{constante}$$

ou seja, algum mecanismo não especificado mantém a temperatura constante em todo o envelope circunstelar. Considerando a equação de estado dos gases perfeitos, e derivando, o gradiente de pressão é

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = \frac{kT}{\mu m_H} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr}$$

derivando a equação de continuidade considerando que dM/dt é constante

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} - \frac{2}{r}$$

com estas duas relações e a equação do movimento, obtemos

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{kT}{\mu m_H} \left(-\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} - \frac{2}{r} \right) + \frac{GM}{r^2} = 0$$

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} \left(v^2 - \frac{kT}{\mu m_H} \right) = \frac{2kT}{\mu m_H} - \frac{GM}{r^2}$$

usando a velocidade isotérmica do som

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} (v^2 - c_s^2) = \frac{2c_s^2}{r} - \frac{GM}{r^2}$$

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \frac{\frac{2c_s^2}{r} - \frac{GM}{r^2}}{v^2 - c_s^2}$$

$$\frac{r}{v} \frac{dv}{dr} = \frac{d \ln v}{d \ln r} = \frac{\Delta}{v^2 - c_s^2}$$

onde definimos

$$\Delta = 2c_s^2 - \frac{GM}{r}$$

★ ★ ★

212. (a) Mostre que a solução do vento isotérmico vista no exercício anterior deve satisfazer à condição no ponto sônico onde $v = c_s$

$$r = r_c = \frac{GM}{2c_s^2}$$

$$v(r) = v(r_c) = c_s$$

(b) Qual é o valor do gradiente de velocidade da solução crítica no ponto sônico?

Solução:

(a) Da solução do exercício anterior

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \frac{\frac{2c_s^2}{r} - \frac{GM}{r^2}}{v^2 - c_s^2}$$

o numerador do segundo membro se anula na posição $r_c = GM/2c_s^2$, o que define o raio crítico r_c , ou ponto crítico. Para que este ponto esteja localizado acima da base do envelope r_0 , devemos ter

$$\frac{GM}{2c_s^2} > r_0$$

ou seja

$$\frac{GM}{2r_0} > c_s^2$$

No ponto crítico, o gradiente de velocidade deve anular-se, a não ser que $v(r_c) = c_s$. Da mesma forma, se $v = c_s$, o gradiente de velocidade será infinito, a não ser que isto ocorra em $r = r_c$. Portanto, a única solução que pode manter um gradiente de velocidade positivo em todo o envelope deve passar pelo ponto crítico, sendo chamada solução crítica. Nesse caso

$$r = r_c = \frac{GM}{2c_s^2}$$

$$v(r) = v(r_c) = c_s$$

(b) Da solução para dv/dr , aplicando a regra de l'Hôpital

$$\lim_{r \rightarrow r_c} \frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \frac{1}{c_s} \left(\frac{dv}{dr} \right)_{r_c} = \frac{-\frac{2c_s^2}{r_c^2} + \frac{2GM}{r_c^3}}{2c_s \left(\frac{dv}{dr} \right)_{r_c}}$$

$$\text{mas } r_c = GM/2c_s^2$$

de modo que

$$\left(\frac{dv}{dr} \right)_{r_c}^2 = -\frac{c_s^2}{r_c^2} + \frac{GM}{r_c^3} = \frac{8c_s^6}{(GM)^2} - \frac{4c_s^6}{(GM)^2} = \frac{4c_s^6}{(GM)^2}$$

$$\left(\frac{dv}{dr} \right)_{r_c} = \frac{2c_s^3}{GM}$$

★ ★ ★

213. Mostre que, em um vento isotérmico sob a ação do gradiente de pressão, a velocidade do gás no ponto crítico é dada por

$$v(r_c) = 1/2 \ v_e(r_c)$$

onde $v_e(r_c)$ é a velocidade de escape do gás no ponto crítico.

Solução:

Para a velocidade de escape, $E_c = |E_p|$

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{G M}{r}$$

no ponto crítico

$$v_e(r_c) = \sqrt{\frac{2 G M}{r_c}}$$

mas devemos ter no ponto crítico

$$r_c = \frac{G M}{2 c_s^2}$$

portanto

$$v(r_c) = c_s = \sqrt{\frac{G M}{2 r_c}}$$

$$v(r_c) = 1/2 v_e(r_c)$$

★ ★ ★

214. Considere que o vento solar é isotérmico com uma temperatura coronal média de 1.5×10^6 K e uma taxa de perda de massa de $2 \times 10^{-14} M_\odot/\text{ano}$. A base da coroa está localizada em $r_0 \simeq 1.003 R_\odot$, onde a densidade é $\rho(r_0) \simeq 1.0 \times 10^{-14} \text{ g/cm}^3$. (a) Calcule a energia potencial a energia cinética e a entalpia do gás em r_0 . (b) Calcule as mesmas quantidades no ponto crítico. Qual dessas energias absorveu a maior fração da energia injetada pelo vento?

Solução:

$$(a) E_p = -\frac{G M}{r_0} = \frac{-(6.67 \times 10^{-8}) (1.99 \times 10^{33})}{(1.003) (6.96 \times 10^{10})} = -1.90 \times 10^{15} \text{ erg/g}$$

para a entalpia temos

$$h = \frac{5}{2} \frac{k T}{\mu m_H} = 5.16 \times 10^{14} \text{ erg/g}$$

onde tomamos $\mu \simeq 0.6$.

Para calcular a energia cinética E_c escrevemos

$$4 \pi r_0^2 \rho_0 v_0 = \dot{M}$$

$$v_0 = \frac{\dot{M}}{4 \pi r_0^2 \rho_0}$$

com os valores dados temos

$$v_0 = 2.06 \times 10^3 \text{ cm/s}$$

$$E_c = (1/2) v_0^2 = 2.12 \times 10^6 \text{ erg/g}$$

(b) Podemos estimar o raio crítico por

$$r_c = \frac{G M}{2 c_s^2} = \frac{G M}{2} \frac{\mu m_H}{k T} = 3.21 \times 10^{11} \text{ cm} = 4.61 R_\odot$$

a velocidade v_c é igual a velocidade do som c_s

$$v_c = c_s = \sqrt{\frac{k T}{\mu m_H}} = 1.44 \times 10^7 \text{ cm/s} = 144 \text{ km/s}$$

a densidade é então

$$\rho_c = \frac{\dot{M}}{4 \pi r_c^2 v_c} = 6.75 \times 10^{-20} \text{ g/cm}^3$$

as energias são

$$E_p = -\frac{G M}{r_c} = -4.13 \times 10^{14} \text{ erg/g}$$

$$E_c = (1/2) v_c^2 = 1.04 \times 10^{14} \text{ erg/g}$$

$$h = \frac{5}{2} \frac{k T}{\mu m_H} = 5.16 \times 10^{14} \text{ erg/g}$$

portanto a maior absorção corresponde à energia cinética.

★ ★ ★

215. Considere um envelope estelar com simetria esférica em expansão adiabática caracterizada pela velocidade $v(r)$, pressão $P(r)$, gravidade efetiva g_{ef} . Admita o parâmetro $\gamma = c_P/c_V$ constante e mostre que a equação do movimento pode ser colocada na forma

$$\frac{r}{v} \frac{dv}{dr} = \frac{\Delta}{v^2 - c_s^2}$$

onde

$$\Delta = 2 c_s^2 - g_{ef} r$$

e c_s é velocidade do som. Como poderia interpretar a equação do movimento?

Solução:

A equação da conservação da quantidade de movimento é

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - g_{ef}$$

a equação de conservação da massa pode ser escrita

$$r^2 \rho v = \text{constante}$$

derivando esta relação com relação a r e simplificando, temos

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{v} \frac{dv}{dr} + \frac{2}{r}$$

considerando a equação de energia na forma $P \propto \rho^\gamma$ temos

$$\frac{dP}{dr} = \gamma \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = c_s^2 \frac{d\rho}{dr}$$

manipulando estas duas relações e a equação do movimento obtemos

$$\left(v - \frac{c_s^2}{v}\right) \frac{dv}{dr} = \frac{2c_s^2}{r} - g_{ef}$$

multiplicando ambos os membros por r

$$\left(v - \frac{c_s^2}{v}\right) r \frac{dv}{dr} = 2c_s^2 - g_{ef} r = \Delta$$

que pode ser escrita

$$\frac{r}{v} \frac{dv}{dr} = \frac{\Delta}{v^2 - c_s^2}$$

Em analogia ao Exercício 211, esta relação mostra que no ponto sônico, onde $v = c_s$, ocorre uma singularidade na equação do movimento, de modo que os fluxos de massa reais devem ter necessariamente $\Delta = 0$ neste ponto, para que o gradiente de velocidade seja finito. (cf. Maciel 2005)

★ ★ ★

216. Em um vento estelar adiabático com simetria esférica, a temperatura média no envelope é $T \simeq 1000$ K e o peso molecular médio é $\mu \simeq 1.2$. (a) Qual é a velocidade do gás no ponto sônico? Considere $\gamma \simeq 5/3$. (b) Sabendo que a velocidade terminal é $v_f \simeq 10$ km/s, que fração desta velocidade é alcançada no ponto sônico?

Solução:

$$(a) v = c_s = \sqrt{\frac{\gamma k T}{\mu m_H}} = \sqrt{\frac{(5/3) (1.38 \times 10^{-16}) (1000)}{(1.2) (1.67 \times 10^{-24})}}$$

$$v = 3.4 \text{ km/s}$$

$$(b) f = \frac{3.4}{10} \simeq 34\%$$

★ ★ ★

217. A partir da aplicação da teoria dos ventos impulsionados pela radiação ao caso de estrelas quentes, é obtida uma correlação entre a quantidade de movimento do vento modificada, $\dot{M} v_f \sqrt{R}$ e a luminosidade da estrela L dada por

$$\log(\dot{M} v_f \sqrt{R/R_\odot}) \simeq -1.37 + 2.07 \log(L/10^6 L_\odot)$$

onde a taxa de perda de massa está em $M_{\odot}/\text{ano}$, a velocidade terminal v_f está em km/s e o raio e a luminosidade da estrela estão em unidades solares. A quantidade de movimento modificada depende fracamente da massa da estrela, de modo que a relação acima não inclui esta dependência. A estrela ϵ Ori tem tipo espectral B0Ia, temperatura efetiva $T_{ef} = 28000 \text{ K}$ e raio $R = 33 R_{\odot}$. Apresenta um vento intenso, cuja velocidade terminal, estimada a partir de perfis espectrais do tipo P Cygni, é $v_f = 1500 \text{ km/s}$. (a) Estime a taxa de perda de massa da estrela. (b) Suponha que a velocidade terminal é alcançada em $r \simeq 2 R_*$. Qual é a densidade do gás circunstelar nesta região?

Solução:

$$(a) L = 4 \pi R^2 \sigma T_{ef}^4$$

$$L = 4 \pi (33 \times 6.96 \times 10^{10})^2 (5.67 \times 10^{-5}) (28000)^4 = 2.31 \times 10^{39} \text{ erg/s}$$

$$L/L_{\odot} = 6.0 \times 10^5$$

$$-1.37 + 2.07 \log(L/10^6 L_{\odot}) = -1.83$$

$$\dot{M} \simeq 1.7 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{ano}$$

$$(b) \dot{M} = 4 \pi r^2 \rho v_f$$

$$\rho = \frac{\dot{M}}{4 \pi r^2 v_f} = \frac{(1.7 \times 10^{-6}) (1.9910^{33})}{(4 \pi) (2 \times 33 \times 6.96 \times 10^{10})^2 (1500 \times 10^5) (3.16 \times 10^7)}$$

$$\rho \simeq 2.7 \times 10^{-15} \text{ g/cm}^3$$

★ ★ ★

218. A estrela HD 36486 (O9.5 II) tem uma temperatura efetiva $\log T_{ef} = 4.49$, um vento estelar com velocidade terminal $v_f = 2000 \text{ km/s}$ e taxa de perda de massa $\dot{M} = 1.0 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{ano}$. (a) Use a relação entre a quantidade de movimento modificada do vento e a luminosidade estelar do exercício anterior e determine a luminosidade da estrela. (b) Qual é a energia por unidade de tempo comunicada pelo vento ao meio interestelar?

Solução:

$$(a) L = 4 \pi R^2 \sigma T_{ef}^4$$

$$x = \frac{L}{10^6 L_{\odot}} = \frac{4 \pi \sigma T_{ef}^4 R_{\odot}^2}{10^6 L_{\odot}} \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^2 = 8.18 \times 10^{-4} \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^2$$

$$\frac{R}{R_{\odot}} = \left(\frac{x}{8.18 \times 10^{-4}} \right)^{1/2}$$

$$\log(\dot{M} v_f) + \log(R/R_{\odot})^{1/2} = -1.37 + 2.07 \log x$$

$$-2.70 + 0.25 \log x - 0.25 \log(8.18 \times 10^{-4}) = -1.37 + 2.07 \log x$$

$$-2.70 + 0.25 \log x + 0.77 = -1.37 + 2.07 \log x$$

$$(2.07 - 0.25) \log x = 1.37 - 1.93$$

$$\log x = -0.31, \quad x = 0.49$$

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 4.9 \times 10^5, \quad \log\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) = 5.69$$

$$L = 1.89 \times 10^{39} \text{ erg/s} \quad (R = 24.5 R_{\odot})$$

$$(b) \quad \frac{E_c}{t} \simeq \frac{1}{2} \dot{M} v_f^2 = \frac{(0.5)(10^{-6})(1.99 \times 10^{33})(2000)^2(10^{10})}{3.16 \times 10^7}$$

$$\frac{E_c}{t} \simeq 1.26 \times 10^{36} \text{ erg/s} = 1.26 \times 10^{29} \text{ J/s} = 1.26 \times 10^{29} \text{ W}$$

★ ★ ★

219. Podemos ter uma idéia da taxa de perda de massa em um vento radiativo admitindo que todos os fótons da estrela são absorvidos uma única vez, o chamado “limite de espalhamento simples”. Neste caso, a quantidade de movimento por unidade de tempo do vento é $\dot{M} v_f$, que deve ser igual à quantidade de movimento radiativa da estrela por unidade de tempo, dada por L/c , de modo que

$$\dot{M} \simeq \frac{L}{v_f c}$$

No espalhamento simples esta expressão é um limite superior, pois nem todos os fótons da estrela são absorvidos. Entretanto, um mesmo fóton pode ser absorvido e reemitido ou espalhado várias vezes, o que pode aumentar a taxa de perda de massa. Estime as taxas limites no caso de (a) uma estrela quente com luminosidade $L \simeq 10^5 L_{\odot}$ e $v_f \simeq 2000 \text{ km/s}$ e (b) em uma gigante vermelha com $L \simeq 10^3 L_{\odot}$ e $v_f \simeq 10 \text{ km/s}$.

Solução:

$$(a) \quad \frac{dM}{dt} \simeq \frac{3.85 \times 10^{38}}{(2.0 \times 10^8)(3.0 \times 10^{10})} \simeq 6.4 \times 10^{19} \text{ g/s} \simeq 1.0 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{ano}$$

$$(b) \quad \frac{dM}{dt} \simeq \frac{3.85 \times 10^{36}}{(10^6)(3.0 \times 10^{10})} \simeq 1.3 \times 10^{20} \text{ g/s} \simeq 2.0 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{ano}$$

★ ★ ★

220. Em uma aproximação mais correta, a taxa de perda de massa em um vento radiativo dada pela expressão do exercício anterior pode ser escrita

$$\dot{M} = \frac{L}{v_f c} \tau_v$$

onde τ_v é a profundidade óptica do vento na região supersônica. Considerando que a energia cinética total do vento é limitada pela energia radiativa da estrela, caracterizada por sua luminosidade L , mostre que existe um limite superior para τ_v dado por

$$\tau_v < \frac{2c}{v_f}$$

Solução:

Podemos escrever

$$\frac{1}{2} \dot{M} v_f^2 < L$$

$$\dot{M} < \frac{2L}{v_f^2}$$

usando a expressão dada

$$\frac{L}{v_f c} \tau_v < \frac{2L}{v_f^2}$$

portanto

$$\tau_v < \frac{2c}{v_f}$$

★ ★ ★

221. A estrela α Sco tem tipo espectral M1.5 I, massa $M = 18 M_\odot$, raio $R = 600 R_\odot$ e luminosidade $\log(L/L_\odot) = 4.6$. Seu vento tem uma velocidade terminal $v_f = 20$ km/s. (a) Determine sua taxa de perda de massa usando a expressão aproximada

$$\dot{M} \simeq \frac{L \tau_d}{c v_f}$$

em que a perda de massa é devida à poeira, sendo τ_d a profundidade óptica total dos grãos. (b) Repita o cálculo da taxa de perda de massa usando a fórmula de Reimers

$$\dot{M}_R \simeq 4 \times 10^{-13} \eta \frac{(L/L_\odot)(R/R_\odot)}{M/M_\odot}$$

onde a luminosidade, raio e massa da estrela são dados em termos das quantidades solares, e η é um parâmetro ajustável. (c) Considerando que a taxa obtida por métodos mais precisos é $dM/dt = 1.0 \times 10^{-6} M_\odot/\text{ano}$, qual é a profundidade óptica total dos grãos τ_d ? Qual é o valor do fator de eficiência η na fórmula de Reimers?

Solução:

$$(a) \frac{L}{L_\odot} = 3.98 \times 10^4, \quad L = 1.53 \times 10^{38} \text{ erg/s}$$

$$\dot{M} \simeq \frac{1.53 \times 10^{38}}{(3 \times 10^{10})(20 \times 10^5)} \tau_d \simeq 2.55 \times 10^{21} \tau_d \text{ g/s}$$

$$\dot{M} \simeq 4.05 \times 10^{-5} \tau_d M_{\odot}/\text{ano}$$

$$(b) \dot{M}_R \simeq 4 \times 10^{-13} \eta \frac{(3.98 \times 10^4)(600)}{18} \simeq 5.31 \times 10^{-7} \eta M_{\odot}/\text{ano}$$

$$(c) \tau_d \simeq \frac{1.0 \times 10^{-6}}{4.05 \times 10^{-5}} \simeq 0.025, \quad \eta \simeq 1.9$$

★ ★ ★

222. No processo de perda de massa pela ação da pressão da radiação em linhas opticamente espessas, a taxa de perda de massa pode ser escrita de maneira aproximada

$$\dot{M} \simeq N \frac{L}{c^2}$$

onde N é o número efetivo de linhas de absorção opticamente espessas e L é a luminosidade da estrela. Considere uma estrela quente com $L/L_{\odot} \sim 10^5$. Quantas linhas de absorção precisariam ser incluídas para reproduzir uma taxa de perda de massa $dM/dt \sim 10^{-6} M_{\odot}/\text{ano}$?

Solução:

Neste caso

$$N \simeq \frac{\dot{M} c^2}{L} \simeq \frac{(1.0 \times 10^{-6})(1.99 \times 10^{33})(3 \times 10^{10})^2}{(3.16 \times 10^7)(10^5)(3.85 \times 10^{33})} \simeq 150$$

★ ★ ★

223. A linha espectral em $\lambda = 1238.8 \text{ \AA}$ do NV é uma das mais importantes nos ventos das estrelas quentes. (a) Qual é o acréscimo em velocidade em um íon de N^{+4} ao absorver um fóton? (b) Supondo que a velocidade terminal do vento seja $v_f = 2000 \text{ km/s}$, quantas absorções seriam necessárias para o íon N^{+4} alcançar a velocidade terminal? (c) Parte da quantidade de movimento adquirida pelo íon N^{+4} é transmitida às partículas mais abundantes do gás, como prótons, elétrons, etc. Supondo que a abundância de nitrogênio seja cerca de 10^{-4} da abundância de H, quantas absorções seriam efetivamente necessárias para o íon N^{+4} alcançar a velocidade terminal?

Solução:

O acréscimo na velocidade é aproximadamente

$$(a) \Delta v \simeq \frac{h\nu}{mc} = \frac{h}{\lambda m}$$

com $m = m_N \simeq 14 m_H$

$$\Delta v \simeq \frac{6.63 \times 10^{-27}}{(1238.8 \times 10^{-8}) (14) (1.67 \times 10^{-24})} \simeq 23 \text{ cm/s}$$

$$(b) N \simeq \frac{v_f}{\Delta v} \simeq \frac{2 \times 10^8}{23} \simeq 8.7 \times 10^6$$

$$(c) N' \simeq \frac{v_f}{\Delta v} \frac{1}{10^{-4}} \simeq \frac{2 \times 10^8}{23} \frac{1}{10^{-4}} \simeq 8.7 \times 10^{10}$$

★ ★ ★

224. Uma estrela quente tem $R = 20 R_\odot$, $T_{ef} = 20.000 \text{ K}$, $L = 10^5 L_\odot$ e um vento com uma taxa $dM/dt = 10^{-6} M_\odot/\text{ano}$. Sua lei de velocidades é dada pela lei beta (Exercício 187), em que a velocidade inicial v_0 é igual à velocidade térmica média v_t com $T \simeq T_{ef}$, velocidade terminal $v_f = 2000 \text{ km/s}$ e índice $\beta = 0.8$. (a) Estime a profundidade óptica dada por

$$\tau = \frac{\sigma_e v_t \rho}{dv/dr}$$

em $r = 1.10 R$. Adote o valor de referência para a opacidade de espalhamento eletrônico $\sigma_e = 0.3 \text{ cm}^2/\text{g}$. (b) Estime o multiplicador de força $M(\tau)$ para o mecanismo de aceleração radiativa dado por $M(\tau) \simeq K \tau^{-\alpha}$ com $K \simeq 0.71$ e $\alpha \simeq 0.47$. (c) Estime a aceleração radiativa total (cm^2/s) em r . Compare seu resultado com a aceleração gravitacional g_* , adotando uma massa de $20 M_\odot$ para a estrela.

Solução:

(a) Para a lei beta obtemos

$$v(r) = v_0 + (v_f - v_0) \left(1 - \frac{R}{r}\right)^\beta$$

$$\frac{dv}{dr} \simeq (v_f - v_0) \beta R \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{\beta-1}$$

usando a a velocidade térmica média

$$v_t \simeq \sqrt{\frac{2kT_{ef}}{m_H}} \simeq 1.82 \times 10^6 \text{ cm/s} \simeq 18.2 \text{ km/s}$$

obtemos

$$v(r) = 3.09 \times 10^7 \text{ cm/s} \simeq 309 \text{ km/s}$$

$$\frac{dv}{dr} \simeq 1.52 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

a densidade pode ser obtida por

$$\rho \simeq \frac{dM/dt}{4\pi r^2 v} = 6.92 \times 10^{-14} \text{ g/cm}^3$$

a profundidade óptica é então

$$\tau \simeq \frac{(0.3) (1.82 \times 10^6) (6.92 \times 10^{-14})}{1.52 \times 10^{-4}} \simeq 2.49 \times 10^{-4}$$

(b) Usando a aproximação dada

$$M(\tau) \simeq 0.71 \tau^{-0.47} \simeq 35.1$$

(c) A aceleração radiativa pode ser escrita

$$g_r \simeq \frac{\sigma_e L}{4 \pi r^2 c} = 130 \text{ cm/s}^2$$

considerando o multiplicador de força, a aceleração radiativa efetiva é

$$g_{ef} \simeq M(\tau) g_r \simeq 4600 \text{ cm/s}^2$$

para comparação, a aceleração gravitacional é

$$g_* \simeq \frac{G M}{r^2} \simeq 1130 \text{ cm/s}^2$$

ou seja

$$\frac{g_{ef}}{g_*} \simeq \frac{4600}{1130} \simeq 4.1$$

PARTE 3 - ASTROFÍSICA GALÁCTICA

COORDENADAS - DISTÂNCIAS - CINEMÁTICA

225. Obtenha as coordenadas equatoriais do centro galáctico a partir de suas coordenadas galácticas $\ell = 0^\circ$, $b = 0^\circ$

Solução:

Considerando a relação

$$\sin \delta = \sin \delta_{PNG} \sin b + \cos \delta_{PNG} \cos b \cos(\ell_{PNC} - \ell)$$

com

$$\delta_{PNG} = 27.12825^\circ [2000.0] \quad (\text{polo norte galáctico})$$

$$\ell_{PNC} = 122.932^\circ \quad (\text{polo norte celeste})$$

$$\sin \delta = \sin(27.12825) \sin 0 + \cos(27.12825) \cos 0 \cos(122.932 - 0)$$

$$\sin \delta = (0.8900)(-0.5436) = -0.4838$$

$$\delta = -28.93^\circ$$

usando a relação

$$\cos \delta \cos(\alpha - \alpha_{PNG}) = \cos \delta_{PNG} \sin b - \sin \delta_{PNG} \cos b \cos(\ell_{PNC} - \ell)$$

com

$$\alpha_{PNG} = 192.8548^\circ [2000.0] \quad (\text{polo norte galáctico})$$

$$\cos(-28.93) \cos(\alpha - 192.85948) =$$

$$\cos(27.12825) \sin 0 - \sin(27.12825) \cos 0 \cos(122.932 - 0)$$

$$(0.8752) \cos(\alpha - 192.85948) = (0.4560)(0.5436)$$

$$\cos(\alpha - 192.85948) = 0.2832$$

$$\alpha - 192.85948 = 73.55$$

$$\alpha = 266.41^\circ$$

★ ★ ★

226. Obtenha as coordenadas galácticas do polo celeste sul a partir de suas coordenadas equatoriais, α (não definida), $\delta = -90^\circ$.

Solução:

Usando a relação

$$\sin b = \cos G \sin \delta - \sin G \cos \delta \sin (\alpha - \alpha_{na})$$

com

$$G = 62.87^\circ \text{ (inclinação do plano galáctico)}$$

$$\alpha_{na} = 282.85^\circ [2000.0] \text{ (nodo ascendente)}$$

$$\sin b = \cos(62.87) \sin(-90) - \sin(62.87) \cos(-90) \sin(\alpha - 282.85)$$

$$\sin b = (0.4560)(-1) = -0.4560$$

$$b = -27.13^\circ$$

usando a relação

$$\sin \delta = \sin \delta_{PNG} \sin b + \cos \delta_{PNG} \cos b \cos(\ell_{PNC} - \ell)$$

com

$$\delta_{PNG} = 27.12825^\circ [2000.0] \text{ (polo norte galáctico)}$$

$$\ell_{PNC} = 122.932^\circ \text{ (polo norte celeste)}$$

$$\sin(-90) = \sin(27.12825) \sin(-27.13) +$$

$$\cos(27.12825) \cos(-27.13) \cos(122.932 - \ell)$$

$$(-1) = (0.4560)(-0.4560) + (0.8900)(0.8900) \cos(122.932 - \ell)$$

$$\cos(122.932 - \ell) = -1$$

$$122.932 - \ell = 180$$

$$\ell = -57.07^\circ \longrightarrow \ell = 360 - 57.07 = 302.93^\circ$$

★ ★ ★

227. Considere a direção do apex solar para a época 1950.0 como $\alpha_0 \simeq 18^h$, $\delta_0 \simeq 30^\circ$. Quais são as coordenadas galácticas (ℓ, b) correspondentes a esta direção?

Solução:

$$\alpha_0 = 18^h = 270^\circ, \quad \delta_0 = 30^\circ$$

Usando a relação

$$\sin b = \cos G \sin \delta - \sin G \cos \delta \sin (\alpha - \alpha_{na})$$

com

$$G = 62.87^\circ \text{ (inclinação do plano galáctico)}$$

$$\alpha_{na} = 282.25^\circ [1950.0] \text{ (nodo ascendente)}$$

$$\sin b = \cos 62.87 \sin \delta - \sin 62.87 \cos \delta \sin (\alpha - 282.25)$$

$$\sin b = (0.4560) (0.500) - (0.8900) (0.8660) \sin (-12.25)$$

$$\sin b = 0.2280 + 0.1635 = 0.3915$$

$$b = 23.04^\circ$$

usando a relação

$$\cos b \cos(\ell - \ell_{na}) = \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_{na})$$

com

$$\ell_{na} = 33.0^\circ \text{ (nodo ascendente)}$$

$$\cos b \cos(\ell - 33) = \cos \delta \cos(\alpha - 282.25)$$

$$(0.9202) \cos(\ell - 33) = (0.8660) (0.9772)$$

$$\cos(\ell - 33) = 0.9196$$

$$\ell - 33 = 23.13 \longrightarrow \ell = 56.13^\circ$$

★ ★ ★

228. Obtenha as coordenadas galácticas da nebulosa planetária Mz 3 a partir de suas coordenadas equatoriais, $\alpha = 16^h 17^m 13^s$, $\delta = -51^\circ 59' 08''$ (época 2000.0).

Solução:

Fazendo as conversões

$$\alpha = 16 + \frac{17}{60} + \frac{13}{3600} = 16.2869^h = 244.303^\circ$$

$$\delta = -(51 + \frac{59}{60} + \frac{8}{3600}) = -51.986^\circ$$

usando a relação

$$\sin b = \cos G \sin \delta - \sin G \cos \delta \sin (\alpha - \alpha_{na})$$

com

$$G = 62.87^\circ \text{ (inclinação do plano galáctico)}$$

$$\alpha_{na} = 282.85^\circ [2000.0] \text{ (nodo ascendente)}$$

$$\sin b = \cos(62.87) \sin (-51.986) -$$

$$\sin(62.87) \cos(-51.986) \sin(244.303 - 282.85)$$

$$\sin b = (0.4560)(-0.7879) - (0.8900)(0.6159)(-0.6232)$$

$$\sin b = -0.3593 + 0.3416 = -0.0177$$

$$b = -1.01^\circ$$

usando a relação

$$\sin \delta = \cos G \sin b + \sin G \cos b \sin (\ell - \ell_{na})$$

com

$$\ell_{na} = 33.0^\circ \text{ (nodo ascendente)}$$

$$\sin (-51.986) = \cos(62.87) \sin (-1.01) + \sin (62.87) \cos(-1.01) \sin (\ell - 33)$$

$$-0.7879 = (0.4560) (-0.0176) + (0.8900)(0.9998) \sin (\ell - 33)$$

$$\sin (\ell - 33) = -0.8764$$

$$\ell - 33 = -61.22$$

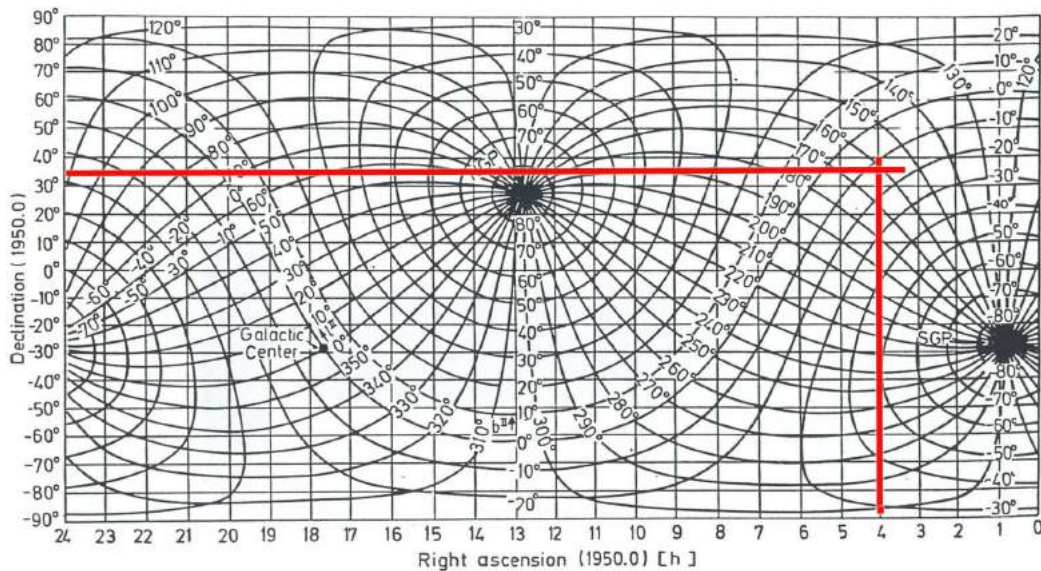
$$\ell = -28.22^\circ \longrightarrow \ell = 360 - 28.22 = 331.78^\circ$$

★ ★ ★

229. A nebulosa planetária IC 2003 tem coordenadas equatoriais $\alpha \simeq 3^{\text{h}}56^{\text{m}}$ e $\delta \simeq 33^\circ 52'$ (época 1950.0). Quais são suas coordenadas galácticas? (a) Use um diagrama de conversão entre as coordenadas equatoriais e galácticas. (b) Use as equações de conversão.

Solução:

(a) Pelo diagrama temos $\ell \simeq 163^\circ$, $b \simeq -14^\circ$



convertendo as coordenadas

$$\alpha = 3.93^{\text{h}} \simeq 59.0^\circ$$

$$\delta = 33.87^\circ$$

usando a relação

$$\sin b = \cos G \sin \delta - \sin G \cos \delta \sin(\alpha - \alpha_{na})$$

com

$$G = 62.87^\circ \text{ (inclinação do plano galáctico)}$$

$$\alpha_{na} = 282.25^\circ [1950.0] \text{ (nodo ascendente)}$$

$$\sin b = \cos 62.87 \sin \delta - \sin 62.87 \cos \delta \sin(\alpha - 282.25)$$

$$\sin b = (0.4560)(0.5573) - (0.8900)(0.8303)(0.6852) = -0.2522$$

$$b = -14.61^\circ$$

usando a relação

$$\cos b \cos(\ell - \ell_{na}) = \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_{na})$$

com

$$\ell_{na} = 33.0^\circ \text{ (nodo ascendente)}$$

$$\cos b \cos(\ell - 33) = \cos \delta \cos(\alpha - 282.25)$$

$$(0.9677) \cos(\ell - 33) = (0.8303)(-0.7284)$$

$$\cos(\ell - 33) = -0.6250$$

$$\ell - 33 = 128.68$$

$$\ell = 161.68^\circ$$

★ ★ ★

230. A nebulosa planetária He2-9 tem uma longitude galáctica $\ell = 258.1^\circ$, e está localizada no plano galáctico. Quais são suas coordenadas equatoriais? Resolva questão de duas maneiras: (a) Usando o diagrama de conversão de coordenadas, e (b) usando as equações trigonométricas de conversão. Note que as equações podem produzir uma ambiguidade nas soluções, que pode ser resolvida usando o diagrama de conversão.

Solução:

(a) Usando o diagrama com $\ell \simeq 258.1^\circ$ e $b = 0^\circ$, $\alpha \simeq 8^h 25^m$, $\delta \simeq -38^\circ$

(b) Usando a relação

$$\sin \delta = \cos G \sin b + \sin G \cos b \sin(\ell - \ell_{na})$$

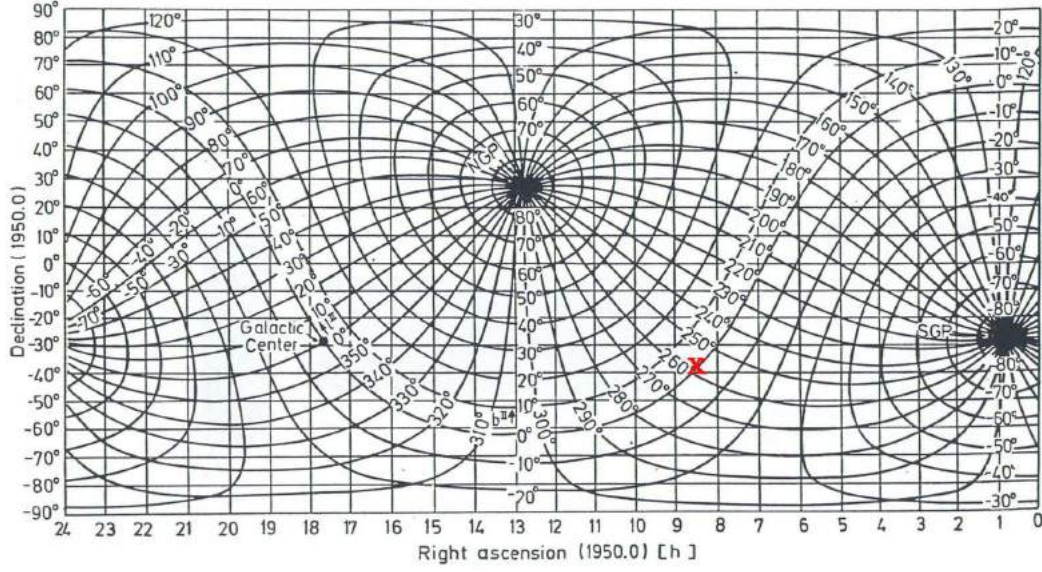
com

$$G = 62.87^\circ \text{ (inclinação do plano galáctico)}$$

$$\ell_{na} = 33.0^\circ \text{ (nodo ascendente)}$$

$$\sin \delta = (\sin 62.87)(1) \sin(258.1 - 33) = (0.8900)(-0.7083) = -0.6304$$

$$\delta = -39.08^\circ$$



usando a relação

$$\cos b \sin(\ell_{PNC} - \ell) = \cos \delta \sin(\alpha - \alpha_{PNG})$$

com

$$\ell_{PNC} = 122.932^\circ \quad (\text{polo norte celeste})$$

$$\alpha_{PNG} = 192.8548^\circ [2000.0] \quad (\text{polo norte galáctico})$$

$$\sin(122.932 - 258.1) = \cos(-39.08) \sin(\alpha - 192.8548)$$

$$-0.7050 = 0.7763 \sin(\alpha - 192.8548)$$

$$\sin(\alpha - 192.8548) = -0.9082$$

$$\alpha - 192.8548 = -65.26$$

$$\alpha = 127.59^\circ = 8^{\text{h}}31^{\text{m}}$$

alternativamente usando a relação

$$\cos b \cos(\ell - \ell_{na}) = \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_{na})$$

com

$$\ell_{na} = 33.0^\circ \quad (\text{nodo ascendente})$$

$$\alpha_{na} = 282.85^\circ [2000.0] \quad (\text{nodo ascendente})$$

$$\cos(\ell - 33) = \cos \delta \cos(\alpha - 282.85)$$

$$\cos(225.1) = \cos(-39.08) \cos(\alpha - 282.85)$$

$$\cos(\alpha - 282.85) = -0.9093$$

Solução 1:

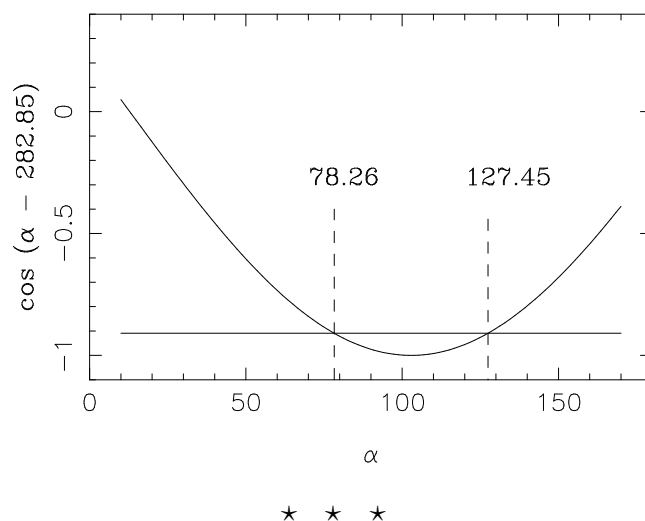
$$\alpha_1 - 282.85 = 155.41$$

$$\alpha_1 = 438.26 = 78.26^\circ$$

Solução 2:

$$\alpha_2 - 282.85 = 360 - 155.41 = 204.59$$

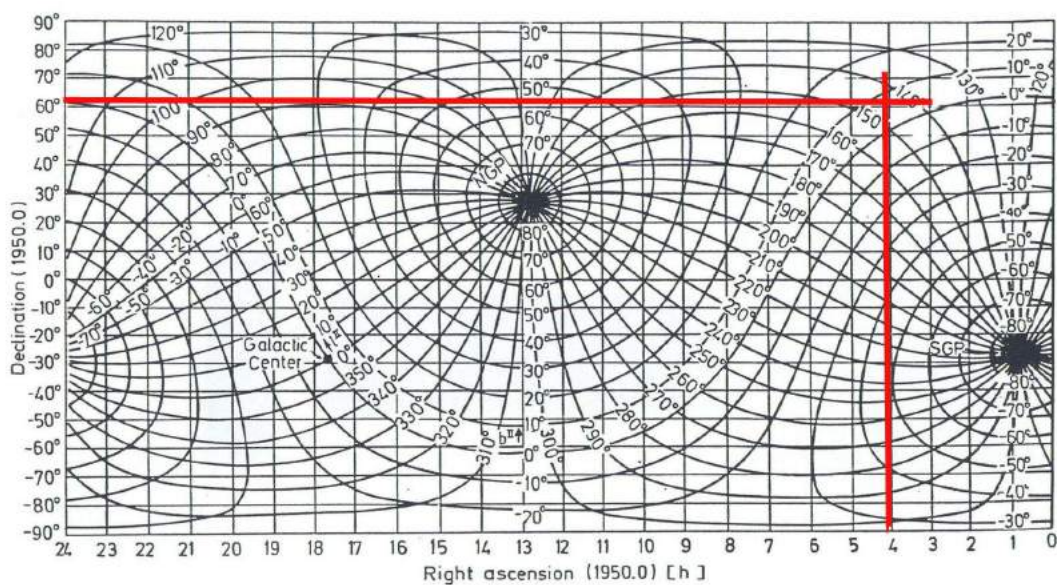
$$\alpha_2 = 487.44 = 127.44^\circ = 8^{\text{h}}30^{\text{m}}$$



231. O aglomerado estelar NGC 1502 tem coordenadas equatoriais para a época 2000.0 dadas aproximadamente por: $\alpha = 4^{\text{h}}7^{\text{m}}49^{\text{s}}$, $\delta = 62^\circ20'$. Quais são suas coordenadas galácticas?

Solução:

Como uma primeira solução vamos usar o diagrama abaixo



obtemos $\ell \simeq 144^\circ$, $b \simeq 8^\circ$

para um resultado mais preciso as coordenadas em graus são

$$\alpha = 4 + \frac{7}{60} + \frac{49}{3600} = 4.13^{\text{h}}$$

$$\alpha = 4.13 \frac{360}{24} = 61.95^{\circ}$$

$$\delta = 62 + \frac{20}{60} = 62.33^{\circ}$$

usando a relação

$$\sin b = \cos G \sin \delta - \sin G \cos \delta \sin(\alpha - \alpha_{na})$$

com

$$G = 62.87^{\circ} \text{ (inclinação do plano galáctico)}$$

$$\alpha_{na} = 282.85^{\circ} [2000.0] \text{ (nodo ascendente)}$$

$$\sin b = \cos 62.87 \sin 62.33 - \sin 62.87 \cos 62.33 \sin(61.95 - 282.85)$$

$$\sin b = 0.4039 - 0.2706 = 0.1333$$

$$b = 7.66^{\circ}$$

usando a relação

$$\cos b \cos(\ell - \ell_{na}) = \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_{na})$$

com

$$\ell_{na} = 33.0^{\circ} \text{ (nodo ascendente)}$$

$$\cos 7.66 \cos(\ell - 33) = \cos 62.33 \cos(61.95 - 282.85) = -0.3510$$

$$\cos(\ell - 33) = -0.3542$$

$$\ell - 33 = 110.74$$

$$\ell = 143.74$$

★ ★ ★

232. Mostre que 1 parsec corresponde a 3.26 anos-luz.

Solução:

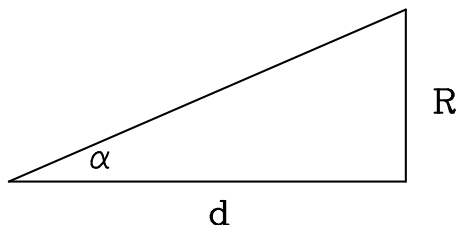
$$1 \text{ pc} = 3.0857 \times 10^{18} \text{ cm}$$

$$1 \text{ ano luz} = ct = (2.9979 \times 10^{10}) (3.1558 \times 10^7) = 9.4608 \times 10^{17} \text{ cm}$$

$$1 \text{ pc} = \frac{3.0857 \times 10^{18}}{9.4608 \times 10^{17}} \simeq 3.26 \text{ anos luz}$$

★ ★ ★

233. A Lua tem um diâmetro de cerca de 3480 km e está a uma distância de 3.84×10^{10} cm da Terra. Qual é seu diâmetro aparente, vista da Terra?



Solução:

$$R = \frac{3480}{2} = 1740 \text{ km} = 1.74 \times 10^8 \text{ cm}$$

$$d = 3.84 \times 10^{10} \text{ cm}$$

$$\alpha = \frac{R}{d} = \frac{1.74 \times 10^8}{3.84 \times 10^{10}} = 0.00453 \text{ rad}$$

$$\phi = 2\alpha = 0.00906 \text{ rad} = 0.00906 \frac{(180)(60)}{\pi} \simeq 31.2 \text{ min} \simeq 1870'' \simeq 0.52^\circ$$

★ ★ ★

234. Até que distância uma moeda de 1 real poderia ser vista pelo Hipparcos? e pelo GAIA? Compare seus resultados com distâncias astronômicas relevantes.

Solução:

$$\text{Hipparcos: } p_H \geq 0.001''$$

$$\text{GAIA: } p_G \geq 0.00001''$$

$$\text{o diâmetro da moeda é } D \simeq 2.7 \text{ cm}$$

$$d_H \leq \frac{D}{p_H} = \frac{(2.7)(180)(3600)}{(0.001)(3.14)}$$

$$d_H \leq 5.57 \times 10^8 \text{ cm} = 5570 \text{ km} = 0.87 R_T$$

$$\text{onde } R_T = 6400 \text{ km é o raio da Terra}$$

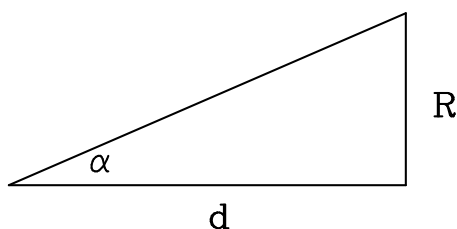
$$d_G \leq \frac{D}{p_G} = \frac{(2.7)(180)(3600)}{(0.00001)(3.14)}$$

$$d_G \leq 5.57 \times 10^{10} \text{ cm} = 1.45 d_L$$

$$\text{onde } d_L = 3.84 \times 10^{10} \text{ cm é a distância Terra-Lua}$$

★ ★ ★

235. O aglomerado globular M4 (NGC 6121) tem um diâmetro aparente máximo de 36 minutos de arco. Sabendo que o aglomerado está localizado a uma distância de 2200 pc, qual é sua dimensão em pc, anos luz e cm?



Solução:

$$\alpha = \frac{36'}{2} = 18' = 18 \frac{\pi}{(180)(60)} = 0.00524 \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{R}{d}$$

$$R = \alpha d = 11.53 \text{ pc} = 3.56 \times 10^{19} \text{ cm} = 37.6 \text{ anos luz}$$

$$D = 2R = 23.06 \text{ pc} = 7.12 \times 10^{19} \text{ cm} = 75.2 \text{ anos luz}$$

★ ★ ★

236. Uma estrela tem uma paralaxe $p = 0.1''$. (a) Qual é sua distância em parsecs e em anos luz? (b) Qual seria sua paralaxe se ela estivesse 10 vezes mais distante?

Solução:

$$(a) d = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.1} = 10 \text{ pc} = 32.6 \text{ anos luz}$$

$$(b) p' = \frac{1}{d'} = \frac{1}{100} = 0.01''$$

★ ★ ★

237. A estrela de Barnard tem o maior movimento próprio conhecido, e deslocou-se no plano do céu cerca de 17.5 minutos de arco de 1900 até 2000. Qual é o valor de seu movimento próprio? Compare seu resultado com dados do Hipparcos, $\mu = 10.358''/\text{ano}$.

Solução:

$$\Delta t = 2000 - 1900 = 100 \text{ anos}$$

$$\mu = \frac{(17.5)(60)}{100} = 10.5''/\text{ano}$$

$$\frac{\mu}{\mu_H} = \frac{10.5}{10.358} = 1.014$$

O erro é de 1.4%

★ ★ ★

238. A estrela de Barnard tem um movimento próprio $\mu = 10.36''/\text{ano}$. A Lua tem um raio de 1740 km e está a uma distância de 384000 km da Terra. Quanto tempo seria necessário para a estrela de Barnard cobrir uma distância no plano do céu equivalente a uma Lua cheia?

Solução:

O ângulo correspondente ao diâmetro lunar é

$$\phi_L \simeq \frac{2 R_L}{d_L} = \frac{2 \times 1740}{384000}$$

$$\phi_L \simeq 9.06 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.52^\circ = 31.2' = 1870''$$

$$t \simeq \frac{\phi_L}{\mu} \simeq \frac{1870}{10.36} \simeq 180.5 \text{ anos}$$

★ ★ ★

239. Mostre que a velocidade angular pode ser escrita como

$$\omega(\text{rad/s}) = 3.24 \times 10^{-17} \omega(\text{km/s/kpc})$$

Solução:

$$\omega(\text{rad/s}) = \frac{10^5}{(10^3)(3.0857 \times 10^{18})} \omega(\text{km/s/kpc})$$

$$\omega(\text{rad/s}) = 3.24 \times 10^{-17} \omega(\text{km/s/kpc})$$

$$\omega(\text{km/s/kpc}) = 3.09 \times 10^{16} \omega(\text{rad/s})$$

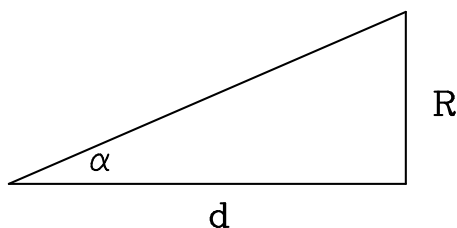
★ ★ ★

240. Uma estrela tem velocidade tangencial v_t , movimento próprio μ e está a uma distância d . (a) Mostre que

$$\mu(''/\text{ano}) = \frac{1}{4.74} \frac{v_t(\text{km/s})}{d(\text{pc})}$$

(b) Considere uma estrela com velocidade tangencial de 10 km/s, e distância de 10 pc. Qual é seu movimento próprio, em segundos de arco por ano?

Solução:



(a) Vamos considerar que a estrela desloca-se por um ângulo α correspondendo a uma distância R no plano do céu. Temos

$$\alpha \simeq \frac{R}{d}$$

$$\mu = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dR}{dt} \frac{1}{d} = \frac{v_t}{d}$$

$$\mu(\text{rad/s}) = \frac{v_t(\text{km/s})}{d(\text{km})} = \frac{v_t(\text{km/s})}{(3.09 \times 10^{13}) d(\text{pc})}$$

$$\mu("/\text{ano}) = \frac{(180)(3600)(3.16 \times 10^7)}{3.14} \mu(\text{rad/s}) = 6.52 \times 10^{12} \mu(\text{rad/s})$$

portanto

$$\mu("/\text{ano}) = \frac{6.52 \times 10^{12}}{3.09 \times 10^{13}} \frac{v_t(\text{km/s})}{d(\text{pc})} = \frac{1}{4.74} \frac{v_t(\text{km/s})}{d(\text{pc})}$$

$$(b) \mu("/\text{ano}) = \frac{v_t(\text{km/s})}{4.74 d(\text{pc})} = \frac{10}{(4.74)(10)} = \frac{1}{4.74} = 0.21"/\text{ano}$$

★ ★ ★

241. Uma estrela do aglomerado das Hyades tem movimento próprio dado por $\mu = 0.10"/\text{ano}$, velocidade radial $v_r = 39 \text{ km/s}$, e $\theta = 30^\circ$, onde θ é o ângulo entre a linha de visada da estrela e a direção do ponto de convergência do aglomerado. Qual seria a paralaxe do aglomerado, usando o método dos aglomerados móveis?

Solução:

Por este método podemos escrever

$$p = \frac{4.74 \mu}{v_t} = \frac{4.74 \mu}{v \sin \theta} = \frac{4.74 \mu}{v_r \tan \theta} = 0.021"$$

$$d = 47.6 \text{ pc}$$

★ ★ ★

242. Uma estrela tem uma velocidade radial $v_r = 100 \text{ km/s}$, e sua distância é de $d = 1000 \text{ pc}$. Supondo que sua velocidade espacial seja isotrópica, qual seria seu movimento próprio esperado?

Solução:

$$v_t \simeq v_r = 4.74 d(\text{pc}) \mu("/\text{ano})$$

$$\mu("/\text{ano}) = \frac{v_t(\text{km/s})}{4.74 d(\text{pc})} = 0.02"/\text{ano}$$

★ ★ ★

243. A velocidade radial de uma estrela é $v_r = 20$ km/s, e sua velocidade tangencial é também $v_t = 20$ km/s. (a) Qual é o valor de sua velocidade espacial? (b) Em que direção a estrela se move com relação à linha de visada?

Solução:

$$(a) v^2 = v_r^2 + v_t^2 = 20^2 + 20^2 = 800$$

$$v = 28.3 \text{ km/s}$$

$$(b) \tan \theta = \frac{v_t}{v_r} = \frac{20}{20} = 1 \longrightarrow \theta = 45^\circ$$

★ ★ ★

244. A velocidade do Sol em relação ao LSR (*Local Standard of Rest* ou Padrão Local de Repouso) é de cerca de 20 km/s. Qual é o valor desta velocidade em UA/ano?

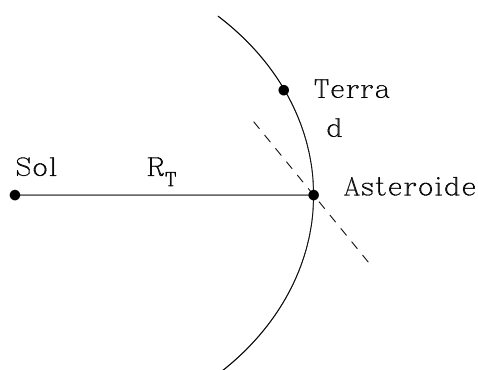
Solução:

$$V_0 = \frac{(20)(3.16 \times 10^7)}{150 \times 10^6} = 4.2 \text{ UA/ano}$$

★ ★ ★

245. Em 23 de Março de 1989 o asteroide Asclepius 4581, com dimensões da ordem de 300 m, atravessou a órbita da Terra, passando a 700 mil km de nosso planeta. Considerando que, em seu movimento de rotação em torno do Sol, a Terra já tinha passado pelo ponto onde as duas órbitas se cruzam, quanto tempo antes a Terra tinha passado pelo ponto onde o asteroide cruzou sua órbita?

Solução:



$$v_T = \frac{2\pi d_T}{T} = \frac{2\pi (150 \times 10^6)}{(365)(24)} \simeq 1.08 \times 10^5 \text{ km/h}$$

$$t \simeq \frac{d}{v_T} \simeq \frac{700000}{1.08 \times 10^5} \simeq 6.5 \text{ horas}$$

★ ★ ★

246. A nebulosa planetária A53 observada na linha $H\alpha$ tem um diâmetro de $28.8''$. Sua distância, determinada por métodos estatísticos, é de 2000 pc. (a) Estime o raio da nebulosa em parsecs. (b) Considere que a nebulosa está se expandindo a uma velocidade de aproximadamente 15 km/s. Supondo que esta velocidade é constante, qual seria a idade dinâmica da nebulosa, isto é, há quanto tempo ela foi ejetada pela estrela central?

Solução:

(a) O raio angular do objeto é

$$\alpha = \frac{28.8}{2} = 14.4''.$$

considerando que o objeto está a uma distância $d = 2000$ pc

$$R = \alpha(\text{rad}) d$$

$$R = \frac{14.4 \pi}{(180)(3600)} 2000 = (6.98 \times 10^{-5}) (2000) = 0.14 \text{ pc}$$

(b) Supondo que a velocidade de expansão é constante, a nebulosa começou a se expandir há um tempo dado por

$$t \simeq \frac{R}{v_e} = \frac{(0.14) (3.09 \times 10^{18})}{15 \times 10^5} = 2.88 \times 10^{11} \text{ s} \simeq 9130 \text{ anos}$$

★ ★ ★

247. As primeiras 4 linhas da série de Balmer do H têm os seguintes comprimentos de onda: $H\alpha$ ($6562.8\text{\AA}$), $H\beta$ ($4861.3\text{\AA}$), $H\gamma$ ($4340.5\text{\AA}$), $H\delta$ ($4101.7\text{\AA}$). Uma estrela tem 4 linhas de absorção cujos comprimentos de onda medidos são $6558.5\text{\AA}$, $4858.1\text{\AA}$, $4339.2\text{\AA}$, $4098.9\text{\AA}$. Supondo que estas linhas correspondam às linhas de Balmer do H com desvios Doppler, qual seria a velocidade radial aproximada da estrela? Qual das medidas está provavelmente errada?

Solução:

$$v_r = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = c \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$

com os valores das medidas, temos

$$H\alpha \quad v_r \simeq -196.4 \text{ km/s}$$

$$H\beta \quad v_r \simeq -197.3 \text{ km/s}$$

$$H\gamma \quad v_r \simeq -89.8 \text{ km/s}$$

$$H\delta \quad v_r \simeq -204.6 \text{ km/s}$$

a velocidade radial média com as 4 linhas é $\bar{v}_r \simeq -172.0 \text{ km/s}$

a velocidade radial média excluindo $H\gamma$ é $\bar{v}_r \simeq -199.4 \text{ km/s}$

a medida de $H\gamma$ está provavelmente errada

★ ★ ★

248. A linha $H\alpha$ do H é observada na estrela Vega (α Lyrae) no comprimento de onda $\lambda = 6562.51 \text{ \AA}$, e seu comprimento de onda de repouso é de $\lambda = 6562.81 \text{ \AA}$. A estrela tem uma paralaxe medida $p = 128.9 \text{ mas}$, e seu movimento próprio é $\mu = 0.35077''/\text{ano}$. (a) Qual é a velocidade radial da estrela em km/s? (b) Qual é sua distância em parsecs? (c) Qual é sua velocidade tangencial? (c) Qual é sua velocidade espacial?

Solução:

$$(a) \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c} \longrightarrow v_r = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

$$v_r \simeq (3 \times 10^5) \frac{6562.51 - 6562.81}{6562.81} = -13.7 \text{ km/s}$$

$$(b) d = \frac{1}{p} = \frac{1}{128.9 \times 10^{-3}} = 7.76 \text{ pc}$$

$$(c) v_t = 4.74 \frac{\mu}{p} = 4.74 \frac{0.35077}{128.9 \times 10^{-3}} = 12.9 \text{ km/s}$$

$$(d) v^2 = v_r^2 + v_t^2 \longrightarrow v = 18.8 \text{ km/s}$$

★ ★ ★

249. Uma estrela está se aproximando de nós com uma velocidade de 30 km/s . Em que comprimento de onda devemos observar uma linha espectral que, no sistema de referência da estrela, tem um comprimento de $6000 \text{ \AA}$?

Solução:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{6000} = \frac{-30}{300000} = -10^{-4}$$

$$\Delta\lambda = (-10^{-4})(6000) = -0.6 \text{ \AA}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = 6000 - 0.6 = 5999.4 \text{ \AA}$$

★ ★ ★

250. Uma galáxia que emite radiação no comprimento de onda $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ se afasta de nós com uma velocidade $v = 3000 \text{ km/s}$. Em que comprimento de onda podemos observar a emissão desta galáxia?

Solução:

Pelo efeito Doppler temos

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$$

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c} \right) = 5000 \left(1 + \frac{3 \times 10^3}{3 \times 10^5} \right) = 5050 \text{ \AA}$$

★ ★ ★

251. Considerando o movimento da Terra em torno do Sol, (a) Qual é a sua velocidade em km/s ? (b) Qual seria o deslocamento de uma linha espectral cujo comprimento de onda de repouso seja $\lambda_0 = 6000 \text{ \AA}$, devido a este movimento?

Solução:

(a) A distância da Terra ao Sol é

$$d_T = 1.5 \times 10^{13} \text{ cm}$$

o período é $P = 365$ dias

$$v_T \simeq \frac{2\pi d_T}{P} \simeq \frac{(2)(3.14)(1.5 \times 10^{13})}{3.16 \times 10^7} \simeq 3.0 \times 10^6 \text{ cm/s} \simeq 30 \text{ km/s}$$

(b) $\lambda_0 = 6000 \text{ \AA}$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_T}{c}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \frac{v_T}{c} = 6000 \frac{30}{300000} = 0.6 \text{ \AA}$$

★ ★ ★

252. No Universo de Kapteyn, a maior parte dos objetos da Galáxia está concentrada em um disco com raio da ordem de 8 kpc e altura total da ordem de 3 kpc. Considerando que a Galáxia está essencialmente contida em uma esfera de diâmetro da ordem de 50 kpc, qual seria a relação entre os volumes da Galáxia e do Universo de Kapteyn?

Solução:

$$V_K \simeq \pi R_K^2 h_K \simeq 1.78 \times 10^{67} \text{ cm}^3 \simeq 600 \text{ kpc}^3$$

$$V_G \simeq \frac{4}{3} \pi R_G^3 \simeq 1.93 \times 10^{69} \text{ cm}^3 \simeq 65000 \text{ kpc}^3$$

$$\frac{V_G}{V_K} \simeq 108$$

★ ★ ★

MAGNITUDES - LUMINOSIDADES

253. A distância de uma estrela, obtida a partir da paralaxe trigonométrica, é de 20 pc. Considerando que a paralaxe pode ser medida com uma incerteza de 0.005" e que a magnitude aparente da estrela é bem determinada, qual seria a incerteza em sua magnitude absoluta?

Solução:

$$m - M = 5 \log d - 5 = -5 \log p - 5$$

$$M = m + 5 \log p + 5$$

$$M + \Delta M = m + 5 \log(p + \Delta p) + 5$$

$$m + 5 \log p + 5 + \Delta M = m + 5 \log(p + \Delta p) + 5$$

$$\Delta M = 5 \log \left(\frac{p + \Delta p}{p} \right) = 5 \log \left(1 + \frac{\Delta p}{p} \right)$$

$$\text{com } d = 20 \text{ pc} \longrightarrow p = \frac{1}{20} = 0.05''$$

$$\Delta p = 0.005''$$

$$\Delta M = 5 \log \left(1 + \frac{0.005}{0.05} \right) = 5 \log 1.1 = 0.2 \text{ mag}$$

★ ★ ★

254. As estrelas de um sistema triplo têm magnitudes visuais aparentes iguais a 2.0, 2.5, e 3.0, respectivamente. Qual é a magnitude aparente do sistema triplo?

Solução:

$$V = -2.5 \log F + C$$

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

$$V_1 = -2.5 \log F_1 + C \longrightarrow F_1 = 10^{0.4(C-V_1)}$$

$$V_2 = -2.5 \log F_2 + C \longrightarrow F_2 = 10^{0.4(C-V_2)}$$

$$V_3 = -2.5 \log F_3 + C \longrightarrow F_3 = 10^{0.4(C-V_3)}$$

$$F = 10^{0.4C} \left[10^{-0.4V_1} + 10^{-0.4V_2} + 10^{-0.4V_3} \right]$$

$$F = 10^{0.4C} [0.16 + 0.10 + 0.06] = (10^{0.4C}) (0.32)$$

$$V = -2.5 \log(0.32 \times 10^{0.4C}) + C$$

$$V = (-2.5) (\log 0.32) - (2.5) (0.4C) + C = (-2.5) (-0.49) = 1.23$$

★ ★ ★

255. Observações feitas na banda R de Cousins ($\lambda \simeq 6470 \text{ \AA}$) de uma variável cefeida na galáxia de Andromeda (M31) mostram que $R = 20.48$, com um período $P = 7.459$ dias. Uma relação período-luminosidade para a banda R pode ser escrita:

$$M_R = a (\log P - 1) + b$$

onde $a = -2.94$ e $b = -4.52$, com o período em dias. (a) Use esses dados e estime a distância de M31, desprezando a extinção interestelar. (b) Repita o cálculo admitindo uma extinção total na banda R de 0.3 magnitudes.

Solução:

$$(a) M_R = a (\log P - 1) + b$$

$$M_R = (-2.94) (\log 7.459 - 1) - 4.52 = -4.15$$

$$R - M_R = 5 \log d - 5$$

$$\log d = 0.2(R - M_R + 5) = 0.2 (20.48 + 4.15 + 5) = 5.93$$

$$d \simeq 850 \text{ kpc}$$

$$(b) R - M_R = 5 \log d - 5 + 0.3$$

$$\log d = 0.2(R - M_R + 5 - 0.3) = 0.2 (20.48 + 4.15 + 5 - 0.3) = 5.87$$

$$d \simeq 740 \text{ kpc}$$

★ ★ ★

256. O aglomerado estelar galáctico NGC 2243 tem um módulo de distância de $m - M = 12.83$ e seu excesso de cor é $E(B-V) = 0.01$. (a) Qual é a distância do aglomerado? (b) O número observado de estrelas por minuto de arco quadrado no plano do céu mostra que a maior parte das estrelas está concentrada no raio angular de aproximadamente $\alpha \simeq 10'$. Qual é o tamanho do aglomerado em pc?

Solução:

$$(a) m - M = 5 \log d - 5 + A$$

$$m - M = 5 \log d - 5 + R_V E(B - V)$$

$$\log d = 0.2[m - M + 5 - R_V E(B - V)]$$

$$\text{adotando } R_V \simeq 3.1$$

$$\log d = 0.2[12.83 + 5 - 3.1 \times 0.01]$$

$$\log d = 3.56 \longrightarrow d \simeq 3630 \text{ pc}$$

$$(b) R = \alpha (\text{rad}) d$$

$$\text{com } \alpha \simeq 10'$$

$$R = \left(\frac{10}{60} \frac{\pi}{180} \right) 3630 \simeq 10.6 \text{ pc}$$

★ ★ ★

257. A magnitude aparente visual da estrela de Barnard é $m_v = 9.54$ e sua distância é $d = 1.83 \text{ pc}$. (a) Qual é sua magnitude absoluta visual? (b) Qual é sua luminosidade? (dado $BC = -2.7$).

Solução:

$$(a) M_v = m_v - 5 \log d + 5 = 9.54 - 5 \log 1.83 + 5 = 13.23$$

(b) A magnitude bolométrica é

$$M_{bol} = M_v + BC = 13.23 - 2.7 = 10.53$$

$$\log \frac{L}{L_{\odot}} = -0.4 (M_{bol} - M_{bol\odot})$$

$$\text{com } M_{bol\odot} \simeq 4.75$$

$$\log \frac{L}{L_{\odot}} = -0.4 (10.53 - 4.75) = -2.31$$

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 4.9 \times 10^{-3}$$

$$L = 1.89 \times 10^{31} \text{ erg/s}$$

★ ★ ★

258. a estrela de Kapteyn (HD 33793), localizada em $\alpha = 5^{\text{h}}11^{\text{m}}41^{\text{s}}$, $\delta = 45^{\circ}01'6''$ tem uma paralaxe $p = 255.26 \text{ mas}$, e seu movimento próprio é $\mu = 8.73''/\text{ano}$. Sua magnitude aparente visual é $V = 8.86$. (a) Qual é sua distância, em pc e anos luz? (b) Qual é sua velocidade tangencial? (c) Qual é sua magnitude absoluta visual?

Solução:

$$(a) d = \frac{1}{p} = \frac{1}{255.26 \times 10^{-3}} \simeq 3.9 \text{ pc} \simeq 12.8 \text{ anos luz}$$

$$(b) v_t = 4.74 \frac{\mu(''/\text{ano})}{p('')} = 4.74 \frac{8.73}{255.26 \times 10^{-3}} \simeq 162 \text{ km/s}$$

(c) Desprezando a extinção

$$V - M_v = 5 \log d - 5$$

$$M_v = V - 5 \log d + 5 = 8.86 - 5 \log 3.92 + 5 \simeq 10.9$$

★ ★ ★

259. Duas estrelas têm a mesma magnitude aparente e o mesmo tipo espectral. Uma delas está a uma distância duas vezes maior que a outra. Qual é o tamanho relativo das duas estrelas?

Solução:

$$d_2 = 2 d_1$$

$$m - M_1 = 5 \log d_1 - 5 \longrightarrow M_1 = m - 5 \log d_1 + 5$$

$$m - M_2 = 5 \log(2 d_1) - 5 \longrightarrow M_2 = m - 5 \log d_1 - 5 \log 2 + 5$$

$$M_2 - M_1 = -5 \log 2 = -1.51$$

considerando os fluxos das estrelas F_1, F_2

$$M_2 - M_1 = -2.5 \log \frac{F_2}{F_1}$$

$$\frac{F_2}{F_1} = 10^{-0.4(M_2 - M_1)} = 10^{0.6} \simeq 4.0$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{4} = 2$$

★ ★ ★

260. A estrela HD 3026 tem magnitude aparente $V = 9.26$ e uma paralaxe $p = 9.57$ mas. (a) Considerando que a correção bolométrica para esta estrela é $BC = -0.16$, qual é sua luminosidade? (b) A temperatura efetiva da estrela é $T_{ef} = 6000$ K. Qual é seu raio? (c) Adotando uma gravidade efetiva $\log g = 4.0$ (cgs) qual é a massa da estrela?

Solução:

$$(a) V - M_V = 5 \log d - 5 = -5 \log p - 5$$

$$M_V = V + 5 \log p + 5 = 9.26 - 10.10 + 5 = 4.16$$

$$M_{bol} = M_V + BC = 4.00$$

$$\log \frac{L}{L_\odot} = \frac{1}{2.5} (M_{bol\odot} - M_{bol}) = \frac{1}{2.5} (4.75 - 4.00) = 0.30$$

$$L \simeq 2 L_\odot \simeq 7.70 \times 10^{33} \text{ erg/s}$$

$$(b) L = 4 \pi R^2 \sigma T_{ef}^4$$

$$R = 9.13 \times 10^{10} \text{ cm} \simeq 1.3 R_\odot$$

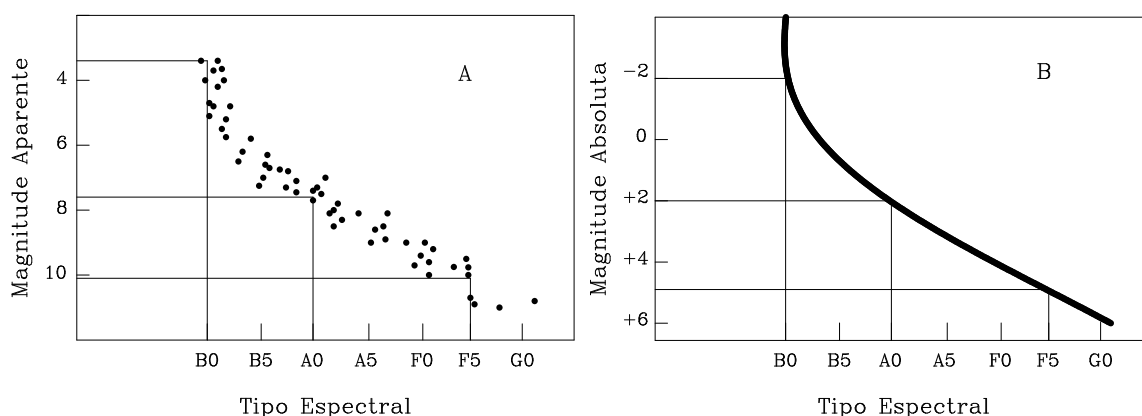
$$(c) g = \frac{G M}{R^2}$$

$$\text{com } \log g = 4.0, \quad g = 10^4 \text{ cm/s}^2$$

$$M = 1.25 \times 10^{33} \text{ g} \simeq 0.63 M_{\odot}$$

★ ★ ★

261. Um aglomerado A tem um diagrama HR observado dado no lado esquerdo da figura abaixo. Por outro lado, um diagrama HR calibrado de outro aglomerado B está mostrado no lado direito da figura. Use o método de ajuste de sequências principais e determine a distância do aglomerado A.



Solução:

Inicialmente ajustamos uma curva média para a sequência principal do aglomerado A. Em seguida selecionamos algumas estrelas, por exemplo B0, A0, F5 e obtemos m_v da figura da esquerda e M_v da figura da direita, e portanto o módulo de distância $m_v - M_v$.

Tipo	$m_v(A)$	$M_v(B)$	$m_v - M_v$
B0	3.4	-2.0	5.4
A0	7.6	+2.0	5.6
F5	10.1	+4.9	5.2

tomando a média

$$\langle m_v - M_v \rangle = 5.4 = 5 \log d - 5$$

$$\log d = 2.08$$

$$d = 120 \text{ pc} \simeq 390 \text{ anos luz}$$

★ ★ ★

262. O fluxo observado da fonte de raios γ GRB990123 é de aproximadamente $2 \times 10^{-10} \text{ W/m}^2$. A fonte está provavelmente associada a uma supernova, cuja distância é de cerca de 2000 Mpc. Qual seria a luminosidade da fonte (em W e erg/s)?

Solução:

$$F \simeq 2 \times 10^{-10} \text{ W m}^{-2} \simeq \frac{(2 \times 10^{-10}) (10^7)}{10^4} \simeq 2 \times 10^{-7} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$d \simeq 2000 \text{ Mpc} = (2 \times 10^3) (10^6) (3.09 \times 10^{18}) = 6.2 \times 10^{27} \text{ cm}$$

$$L \simeq 4 \pi d^2 F$$

$$L \simeq (4) (3.14) (6.2 \times 10^{27})^2 (2 \times 10^{-7}) \simeq 9.7 \times 10^{49} \text{ erg/s} \simeq 10^{43} \text{ W}$$

★ ★ ★

263. A faixa visível do espectro eletromagnético varia de $\lambda \simeq 400 \text{ nm}$ (violeta) a $\lambda \simeq 700 \text{ nm}$ (vermelho), aproximadamente. (a) Qual seria a variação em comprimentos de onda, medidos em Angstroms ($\text{\AA}$)? (b) Qual seria esta variação em frequências, medidas em Hz?

Solução:

$$(a) \lambda_i = 400 \text{ nm} = 4000 \text{ \AA}$$

$$\lambda_f = 700 \text{ nm} = 7000 \text{ \AA}$$

$$(b) \nu_i = \frac{c}{\lambda_i} = \frac{3 \times 10^{10}}{(4000) (10^{-8})} = 7.50 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\nu_f = \frac{c}{\lambda_f} = \frac{3 \times 10^{10}}{(7000) (10^{-8})} = 4.29 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

★ ★ ★

264. Qual é a frequência de uma onda eletromagnética cujo comprimento de onda é $\lambda = 1 \text{ m}$? Em que faixa do espectro eletromagnético esta onda pode ser observada?

Solução:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.0 \times 10^{10}}{100} = 3.0 \times 10^8 \text{ Hz} = 300 \text{ MHz}$$

A onda pode ser observada em rádio

★ ★ ★

265. Os radioastrônomos usam frequentemente uma unidade de densidade de fluxo chamada Jansky (Jy), tal que $1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$. (a) Qual é

a equivalência desta unidade com o sistema cgs? (b) Considere uma fonte com uma potência $P = 600 \text{ W}$ localizada na Lua, cuja distância é de 384000 km . Supondo que a energia é emitida uniformemente entre as frequências $\nu_1 = 2.7 \text{ GHz}$ e $\nu_2 = 2.8 \text{ GHz}$, qual é a densidade de fluxo da fonte, em Jy, $\text{W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$ e $\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$?

Solução:

$$(a) 1 \text{ Jy} = \frac{(10^{-26})(10^7)}{10^4} = 10^{-23} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$$

$$(b) \Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = 0.1 \text{ GHz} = 100 \text{ MHz} = 10^8 \text{ Hz}$$

$$S_\nu = \frac{P}{4\pi d^2 \Delta\nu} = \frac{600}{(4\pi)(3.84 \times 10^8)^2 (10^8)} = 3.24 \times 10^{-24} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$$

$$S_\nu = 324 \text{ Jy} = 3.24 \times 10^{-21} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$$

★ ★ ★

266. Uma pessoa consome 3000 kcal em um dia. Se toda esta energia for perdida na forma de calor durante este tempo, qual seria a potência emitida, em W e erg/s ? ($1 \text{ cal} = 4.185 \text{ J}$)

Solução:

$$\Delta E = 3000 \text{ kcal} = (3000)(10^3)(4.185) = 1.26 \times 10^7 \text{ J} = 1.26 \times 10^{14} \text{ erg/s}$$

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1.26 \times 10^7}{(24)(3600)} \simeq 146 \text{ W} = 1.46 \times 10^9 \text{ erg/s}$$

★ ★ ★

ESTRUTURA GALÁCTICA - CURVA DE ROTAÇÃO

267. O aglomerado globular M13 em Hercules tem coordenadas galácticas $\ell = 59.0^\circ$ e $b = 40.9^\circ$, e sua distância até nós é de 7 kpc . A nebulosa de Orion tem coordenadas $\ell = 209.0^\circ$ e $b = -19.4^\circ$, com uma distância de 450 pc . (a) A que distância acima (ou abaixo) do plano galáctico estão estes objetos? (b) Com base nessas informações, a que populações estelares eles devem pertencer?

Solução:

$$(a) \text{ Para M13: } z = d \sin b = (7000)(\sin 40.9) \simeq 4.58 \text{ kpc}$$

$$\text{Para Orion: } z = d \sin b = (450)(\sin -19.4) \simeq -149 \text{ pc}$$

$$(b) \text{ Com estes dados, M13} \longrightarrow \text{população II, Orion} \longrightarrow \text{população I}$$

★ ★ ★

268. A região HII S294 tem longitude galáctica $\ell = 224.19^\circ$, e sua velocidade radial relativa ao LSR é $v_r = 32.9 \text{ km/s}$. Sabendo que a distância a esta região HII é $d = 4.6 \text{ kpc}$ (a) Qual é sua distância galactocêntrica? (b) Qual é a velocidade angular na posição da nebulosa? (c) Qual é a velocidade linear de rotação nesta posição? ($R_0 = 8 \text{ kpc}$, $\Theta_0 = 200 \text{ km/s}$)

Solução:

(a) A distância galactocêntrica R pode ser obtida por

$$R^2 = R_0^2 + d^2 - 2 R_0 d \cos \ell$$

com os dados, o resultado é $R \simeq 11.74 \text{ kpc}$

(b) A velocidade angular ω é dada pela relação

$$\omega = \omega_0 + \frac{v_r}{R_0 \sin \ell}$$

com $\omega_0 = \Theta_0/R_0 = 25 \text{ km/s/kpc}$, temos

$$\omega \simeq 19.10 \text{ km/s/kpc} \simeq 6.19 \times 10^{-16} \text{ rad/s}$$

(c) A velocidade linear Θ é

$$\Theta = \omega R \simeq 224.23 \text{ km/s}$$

★ ★ ★

269. A nebulosa NGC 7293 está localizada na longitude galáctica $\ell = 36.17^\circ$ e latitude galáctica $b = -57.16^\circ$, e sua distância é $d = 200 \text{ pc}$. Qual é sua altura z com relação ao plano galáctico? Adote $R_0 = 8.0 \text{ kpc}$.

Solução:

$$z = d \sin b = 200 \sin(-57.16) = -168 \text{ pc}$$

$$R^2 = R_0^2 + (d \cos b)^2 - 2 R_0 (d \cos b) \cos \ell \simeq 62.6$$

$$R \simeq 7.9 \text{ kpc}$$

★ ★ ★

270. Considere o movimento das estrelas no plano galáctico admitindo que as órbitas dos objetos contidos neste plano sejam circulares, isto é, todos os objetos movem-se em torno do centro galáctico em órbitas circulares a uma distância R do centro. Mostre que a velocidades radial e tangencial podem ser escritas na forma

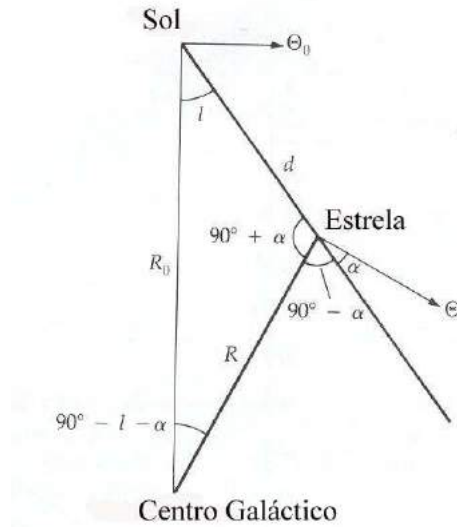
$$v_r = R_0 (\omega - \omega_0) \sin \ell \quad (1)$$

$$v_t = R_0 (\omega - \omega_0) \cos \ell - \omega d \quad (2)$$

onde v_r é velocidade radial da estrela com relação ao Sol, R_0 é a distância galactocêntrica do Sol, ω é a velocidade angular da estrela, ω_0 é a velocidade angular na posição do Sol, ℓ é a longitude galáctica da estrela, v_t é a velocidade tangencial da estrela, e d é sua distância.

Solução:

Considerando a geometria indicada na figura, podemos escrever



$$v_r = \Theta \cos \alpha - \Theta_0 \sin \ell$$

onde Θ é a velocidade linear (km/s) da estrela com relação ao centro galáctico, Θ_0 o valor correspondente em R_0 e α é o ângulo entre a direção da estrela e a direção de sua velocidade de rotação.

Usando a lei dos senos

$$\frac{\sin \ell}{R} = \frac{\sin (90 + \alpha)}{R_0} = \frac{\cos \alpha}{R_0}$$

a equação anterior fica

$$v_r = \Theta \frac{R_0}{R} \sin \ell - \Theta_0 \sin \ell$$

introduzindo a velocidade angular ω

$$\Theta = \omega R$$

$$v_r = \left(\Theta \frac{R_0}{R} - \Theta_0 \right) \sin \ell$$

e portanto

$$v_r = R_0 (\omega - \omega_0) \sin \ell \quad (1)$$

para obter a segunda equação temos

$$v_t = \Theta \sin \alpha - \Theta_0 \cos \ell$$

como

$$R \sin \alpha = R_0 \cos \ell - d$$

temos

$$v_t = \frac{\Theta}{R} (R_0 \cos \ell - d) - \Theta_0 \cos \ell$$

de modo que

$$v_t = \left(\Theta \frac{R_0}{R} - \Theta_0 \right) \cos \ell - \frac{\Theta}{R} d$$

portanto

$$v_t = R_0 (\omega - \omega_0) \cos \ell - \omega d \quad (2)$$

★ ★ ★

271. Mostre que a relação entre a velocidade de rotação galáctica Θ e distância galactocêntrica R válida para rotação rígida

$$\Theta = \omega R$$

pode ser obtida admitindo que a densidade ρ do disco da Galáxia é constante.

Solução:

A aceleração centrípeta é

$$a = \frac{\Theta^2}{R} = \frac{G M}{R^2}$$

a massa contida em R é

$$M \simeq \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

portanto

$$\frac{\Theta^2}{R} = \left(\frac{G}{R^2} \right) \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho \right) = \frac{4}{3} \pi G \rho R$$

$$\Theta^2 = \frac{4}{3} \pi G \rho R^2$$

$$\Theta = \left(\frac{4}{3} \pi G \rho \right)^{1/2} R = k R$$

para mostrar que $k = \omega$ podemos usar a terceira lei de Kepler:

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi \left(\frac{GM}{4\pi^2 R^3} \right)^{1/2} = \left(\frac{GM}{R^3} \right)^{1/2}$$

como $M = (4/3)\pi R^3 \rho$, temos

$$\omega = \left(\frac{4}{3} \pi G \rho \right)^{1/2}$$

★ ★ ★

272. Considere o movimento de rotação galáctica, admitindo que as órbitas são keplerianas. Obtenha expressões para a velocidade de rotação e velocidade angular em função da distância galactocêntrica.

Solução:

Considerando M a massa interna a R temos

$$\frac{GM}{R^2} = \frac{\Theta^2}{R}$$

de modo que

$$\Theta = \left(\frac{GM}{R} \right)^{1/2}$$

ou seja, $\Theta \propto R^{-1/2}$

para a velocidade angular temos

$$\omega = \frac{\Theta}{R} = \left(\frac{GM}{R^3} \right)^{1/2}$$

ou seja, $\omega \propto R^{-3/2}$

★ ★ ★

273. Mostre que a relação para órbitas keplerianas do exercício anterior pode ser obtida a partir da terceira lei de Kepler.

Solução:

Da terceira lei

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3$$

$$P = \frac{2\pi R}{\Theta}$$

$$\frac{4\pi^2 R^3}{GM} = \frac{4\pi^2 R^2}{\Theta^2}$$

$$\Theta^2 = \frac{G M}{R} \longrightarrow \Theta = \left(\frac{G M}{R} \right)^{1/2}$$

★ ★ ★

274. Considere órbitas keplerianas no plano galáctico adotando $R_0 = 8 \text{ kpc}$ e $\Theta_0 = 200 \text{ km/s}$ e faça gráficos da velocidade linear e da velocidade angular em função da distância galactocêntrica.

Solução:

Neste caso podemos escrever simplesmente

$$\omega_0 = \frac{\Theta_0}{R_0} = 25 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} = 8.1 \times 10^{-16} \text{ rad/s}$$

a velocidade linear de rotação é

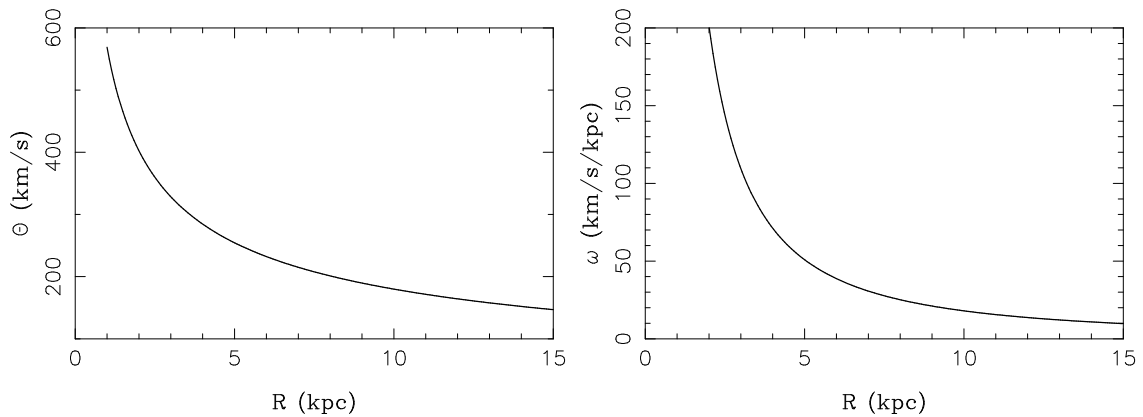
$$\Theta = \left(\frac{G M}{R} \right)^{1/2}$$

de modo que a massa interna à posição R_0 é

$$M = \frac{\Theta^2 R_0}{G} \simeq 1.5 \times 10^{44} \text{ g} \simeq 7.4 \times 10^{10} M_\odot$$

a velocidade angular é dada por

$$\omega = \frac{\Theta}{R} = \left(\frac{G M}{R^3} \right)^{1/2}$$



★ ★ ★

275. Considere novamente órbitas keplerianas nas mesmas condições do exercício anterior, obtenha expressões e faça gráficos da velocidade radial em função da distância. Considere 4 casos segundo os valores da longitude galáctica: $0^\circ < \ell < 90^\circ$, $90^\circ < \ell < 180^\circ$, $180^\circ < \ell < 270^\circ$ e $270^\circ < \ell < 360^\circ$.

Solução:

Com as equações do exercício anterior e usando a lei dos co-senos para o plano galáctico ($b = 0^\circ$)

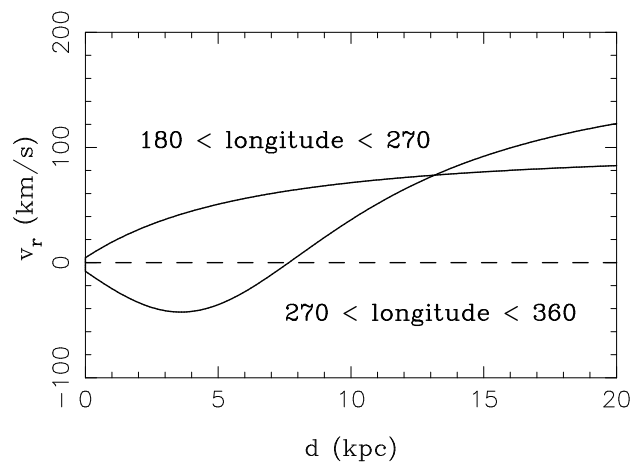
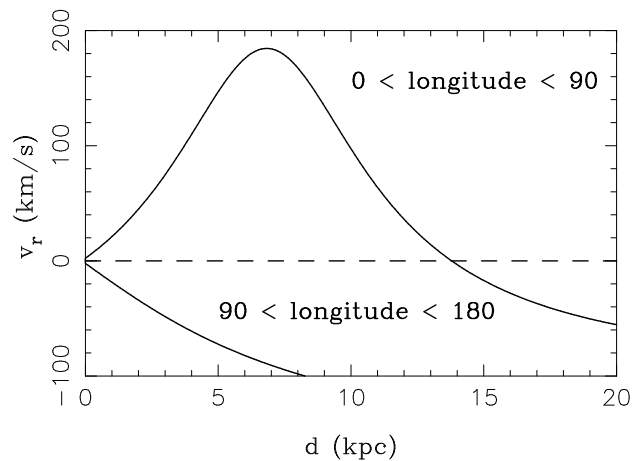
$$R^2 = R_0^2 + d^2 - 2 R_0 d \cos \ell \quad (1)$$

$$\Theta = \left(\frac{G M}{R} \right)^{1/2} \quad (2)$$

$$\omega = \frac{\Theta}{R} = \left(\frac{G M}{R^3} \right)^{1/2} \quad (3)$$

$$v_r = R_0 (\omega - \omega_0) \sin \ell \quad (4)$$

Fixada a longitude ℓ , para cada valor de d podemos calcular a distância galactocêntrica R por (1), a velocidade linear Θ por (2), a velocidade angular ω por (3) e a velocidade radial v_r por (4). Os resultados estão nas figuras a seguir, considerando $\ell = 30^\circ, 120^\circ, 210^\circ, 300^\circ$ como exemplos.



★ ★ ★

276. Considere uma curva de rotação galáctica da forma

$$\Theta(R) = a + b R + c R^2$$

válida no intervalo $4 < R(\text{kpc}) < 13$, onde $a = 223.40$, $b = -6.45$ e $c = 0.44$, de modo que a velocidade Θ esteja em km/s. Estime a massa da Galáxia interna ao raio $R = 10$ kpc. Obtenha o valor da massa em g e em massas solares.

Solução:

Para $R = 10$ kpc temos $\Theta(R) \simeq 202.9$ km/s

$$\frac{G M}{R^2} \simeq \frac{\Theta^2}{R}$$

$$M \simeq \frac{\Theta^2 R}{G}$$

$$M(M_\odot) \simeq \frac{(202.9)^2 (10)}{(6.67 \times 10^{-8})} \frac{(10^{10}) (3.09 \times 10^{21})}{(1.99 \times 10^{33})}$$

$$M \simeq 9.6 \times 10^{10} M_\odot \simeq 1.9 \times 10^{44} \text{ g}$$

★ ★ ★

277. A nebulosa planetária NGC 6803 está próxima do plano galáctico e localizada na longitude galáctica $\ell = 46.44^\circ$, com uma distância $d = 2.5$ kpc. Considere a curva de rotação do exercício anterior e (a) estime sua velocidade linear de rotação, adotando $R_0 = 8.0$ kpc. (b) A velocidade radial observada da nebulosa relativa ao LSR é $v_r = 30.4$ km/s. Pode-se dizer que ela participa do movimento de rotação diferencial? (c) Qual é a velocidade angular na posição da nebulosa?

Solução:

(a) Admitindo $b \simeq 0$, temos

$$R^2 = R_0^2 + d^2 - 2 R_0 d \cos \ell$$

$$R \simeq 6.5 \text{ kpc}$$

da curva de rotação $\Theta(R) \simeq 200.04$ km/s, $\Theta_0 \simeq 199.96$ km/s

$$(b) v_r(cr) = \Theta_0 \left(\frac{R_0}{R} - 1 \right) \sin \ell \simeq 32.6 \text{ km/s}$$

$$\text{como } v_r \simeq 30.4 \text{ km/s} \simeq 0.93 v_r(cr)$$

a nebulosa participa do movimento de rotação.

$$(c) v_r = R_0 (\omega - \omega_0) \sin \ell$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{v_r}{R_0} \sin \ell$$

$$\omega_0 = \frac{\Theta_0}{R_0} = 25 \text{ km/s/kpc}$$

$$\omega = 25 + \frac{30.4}{(8) \sin 46.44} = 30.2 \text{ km/s/kpc} = 9.8 \times 10^{-16} \text{ rad/s}$$

★ ★ ★

278. A nebulosa Hb5 está localizada próximo ao plano galáctico com uma longitude $\ell = 359.35^\circ$, e sua distância ao Sol é $d = 1.2 \text{ kpc}$. A velocidade radial relativa ao LSR é $v_r = -17.9 \text{ km/s}$. (a) Qual é sua distância galactocêntrica? (b) Supondo que a nebulosa participa do movimento de rotação galáctica, qual seria a velocidade linear de rotação na posição em que a nebulosa se encontra? Adote $R_0 = 8.0 \text{ kpc}$ e $\Theta_0 = 200 \text{ km/s}$.

Solução:

$$(a) R^2 = R_0^2 + (d \cos b)^2 - 2 R_0 (d \cos b) \cos \ell$$

$$R \simeq 6.80 \text{ kpc}$$

$$(b) v_r = \left(\Theta \frac{R_0}{R} - \Theta_0 \right) \sin \ell$$

$$\Theta = \frac{R}{R_0} \left(\Theta_0 + \frac{v_r}{\sin \ell} \right)$$

$$\Theta \simeq 1500 \text{ km/s}$$

Este resultado não faz sentido. Para $\ell \simeq 0$ a velocidade radial v_r deve ser aproximadamente nula. Se $v_r \simeq 0$

$$\Theta \simeq \frac{R}{R_0} (\Theta_0 + 0) \simeq 170 \text{ km/s}$$

★ ★ ★

279. Considere novamente uma curva de rotação galáctica da forma

$$\Theta(R) = a + b R + c R^2$$

válida no intervalo $6 < R(\text{kpc}) < 10$, onde $a = 250 \text{ km/s}$, $b = -11 \text{ km/s/kpc}$ e $c = 0.6 \text{ km/s/kpc}^{-2}$, e a velocidade Θ está em km/s . Adote $R_0 = 7.5 \text{ kpc}$ e determine as constantes de Oort.

Solução:

Neste caso, em $R = R_0$ temos $\Theta = \Theta_0 \simeq 201.3 \text{ km/s}$

derivando Θ temos

$$\frac{d\Theta}{dR} = b + 2 c R$$

$$\left. \frac{d\Theta}{dR} \right)_{R_0} = b + 2c R_0 \simeq -2 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$$

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{\Theta_0}{R_0} - \left. \left(\frac{d\Theta}{dR} \right) \right)_{R_0} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{201.3}{7.5} + 2 \right)$$

$$A = 14.4 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$$

$$B = -\frac{1}{2} \left[\frac{\Theta_0}{R_0} + \left. \left(\frac{d\Theta}{dR} \right) \right)_{R_0} \right] = -\frac{1}{2} \left(\frac{201.3}{7.5} - 2 \right)$$

$$A = -12.4 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$$

★ ★ ★

280. A curva de rotação galáctica pode ser representada aproximadamente pelas relações

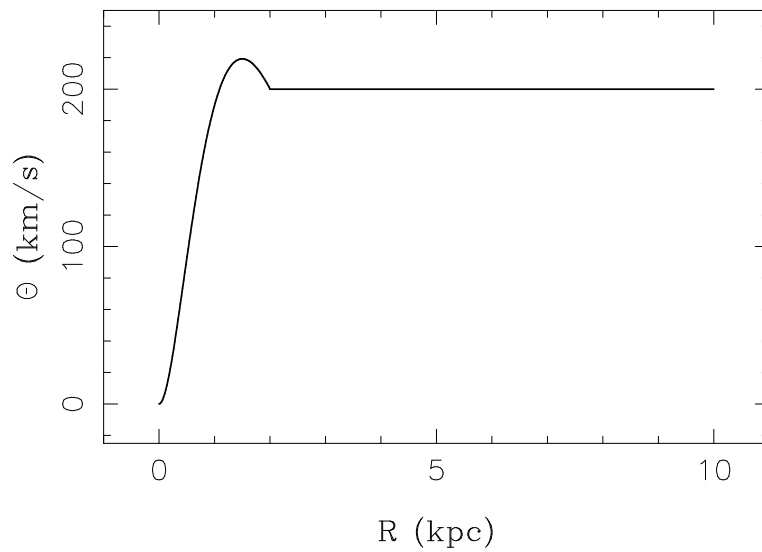
$$\Theta(R) = \frac{a R^2}{e^b R} \quad \text{para } 0 \leq R \leq 2 \text{ kpc}$$

$$\Theta(R) = c \quad \text{para } R \geq 2 \text{ kpc}$$

onde $a = 720 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-2}$, $b = 4/3 \text{ kpc}^{-1}$, $c = 200 \text{ km/s}$, Θ está em km/s e R em kpc . (a) Faça um gráfico para a curva de rotação. (b) Com base no dados, quais seriam os valores das constantes de Oort, A e B ? Considere a posição do Sol em $R_0 = 8.0 \text{ kpc}$.

Solução:

(a) O gráfico está a seguir.



(b) As constantes de Oort são dadas por

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{\Theta_0}{R_0} - \left(\frac{d\Theta}{dR} \right)_{R_0} \right]$$

$$B = -\frac{1}{2} \left[\frac{\Theta_0}{R_0} + \left(\frac{d\Theta}{dR} \right)_{R_0} \right]$$

$$\omega_0 = \frac{\Theta_0}{R_0} = \frac{200}{8} = 25 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$$

$$\left(\frac{d\Theta}{dR} \right)_{R_0} = 0$$

portanto

$$A = 12.5 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$$

$$B = -12.5 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$$

★ ★ ★

281. Suponha que o disco galáctico tem um movimento de rotação rígida em suas regiões mais internas, tal que a velocidade de rotação $\Theta(R) = 0$ em $R = 0$ e $\Theta(R) = 250 \text{ km/s}$ em $R = 2 \text{ kpc}$. Considere que, a partir de $R = 2 \text{ kpc}$ o movimento de rotação do disco seja kepleriano, e que toda a massa do disco está contida dentro de 2 kpc do centro. (a) Qual seria a massa do disco? (b) Qual seria a velocidade de rotação esperada na posição do Sol, onde $R_0 = 8 \text{ kpc}$?

Solução:

$$(a) \frac{\Theta^2}{R} \simeq \frac{G M}{R^2}$$

$$M \simeq \frac{\Theta^2 R}{G}$$

com $\Theta = 250 \text{ km/s}$ e $R = 2 \text{ kpc}$

$$M \simeq \frac{(250^2) (2)}{6.67 \times 10^{-8}} (10^5)^2 (10^3) (3.09 \times 10^{18})$$

$$M \simeq 5.79 \times 10^{43} \text{ g} \simeq 2.91 \times 10^{10} M_{\odot}$$

(b) $R = 8 \text{ kpc}$

$$\Theta \simeq \left(\frac{G M}{R} \right)^{1/2} \simeq \left[\frac{(6.67 \times 10^{-8}) (5.79 \times 10^{43})}{(8) (10^3) (3.09 \times 10^{18})} \right]^{1/2} \frac{1}{10^5}$$

$$\Theta \simeq 125 \text{ km/s}$$

★ ★ ★

282. Uma nuvem de CO tem velocidade radial máxima $v_r = 84.52 \text{ km/s}$ relativa ao LSR, e sua longitude galáctica $\ell = 35.63^\circ$. (a) Qual é a distância galactocêntrica

da nuvem? (b) Qual é a velocidade de rotação esperada nesta posição? ($R_0 = 8 \text{ kpc}$, $\Theta_0 = 200 \text{ km/s}$).

Solução:

$$(a) R = R_0 \sin \ell \quad (1)$$

$$R = 4.66 \text{ kpc}$$

(b) Podemos escrever

$$v_r = R_0 (\omega - \omega_0) \sin \ell \quad (2)$$

$$\Theta = \omega R \quad (3)$$

usando (1), (2), (3)

$$\Theta = \omega R_0 \sin \ell = \left[\omega_0 + \frac{v_r}{R_0 \sin \ell} \right] R_0 \sin \ell$$

$$\Theta = \left[\frac{\Theta_0}{R_0} + \frac{v_r}{R_0 \sin \ell} \right] R_0 \sin \ell = \left[\Theta_0 + \frac{v_r}{\sin \ell} \right] \sin \ell$$

$$\Theta = v_r + \Theta_0 \sin \ell$$

com os valores dados, temos

$$\Theta \simeq 201.03 \text{ km/s}, \quad \omega \simeq 43.14 \text{ km/s/kpc}$$

★ ★ ★

283. Medidas da emissão de CO nos pontos tangentes em diversas longitudes galácticas produzem os resultados mostrados nas duas primeiras colunas da tabela a seguir, onde ℓ é a longitude e v_r a velocidade radial máxima em km/s relativa ao LSR. Admitindo que as nuvens de CO têm um movimento de rotação em torno do centro galáctico, determine a curva de rotação para a região onde estão localizadas as nuvens. (Adote $R_0 = 8.0 \text{ kpc}$ e $\Theta_0 = 200 \text{ km/s}$)

ℓ	v_r	R	Θ
14.92	140.99	2.06	192.48
17.91	129.53	2.46	191.03
22.80	114.13	3.10	191.63
32.17	99.50	4.26	205.99
42.65	70.32	5.42	205.82
48.37	58.29	5.98	207.78
61.95	30.80	7.06	207.31
82.98	8.68	7.94	207.18

Solução:

$$R = R_m = R_0 \sin \ell \quad (1)$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{v_r}{R_0 \sin \ell} \quad (2)$$

$$\Theta = \omega R \quad (3)$$

com os dados temos

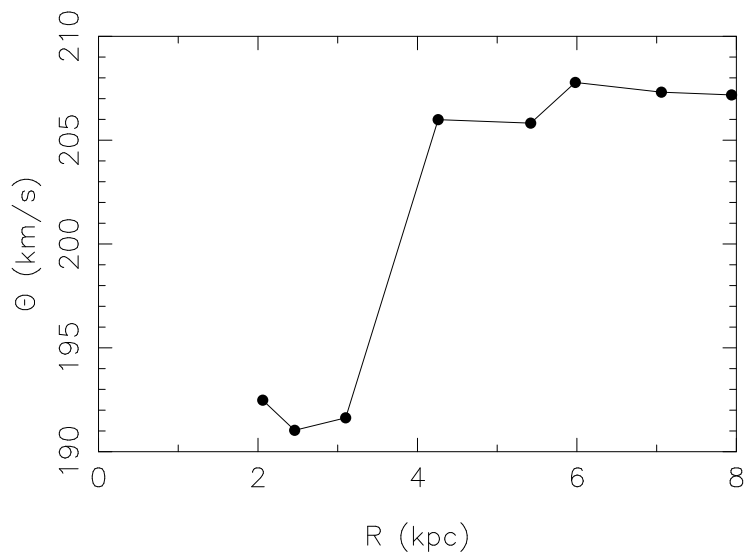
$$\omega_0 = \frac{\Theta_0}{R_0} = 25 \text{ km/s/kpc}$$

com a longitude ℓ , a distância R pode ser calculada por (1)

com ℓ, v_r , a velocidade angular ω pode ser calculada por (2)

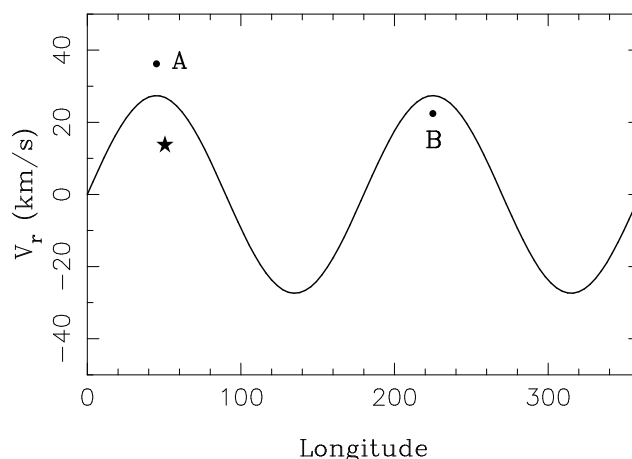
com R, ω , a velocidade linear Θ pode ser calculada por (3)

os resultados estão nas duas últimas colunas da tabela e na figura abaixo.



★ ★ ★

284. A figura abaixo mostra a velocidade radial de algumas estrelas cefeidas em função de sua longitude galáctica. Admitindo que essas estrelas são objetos relativamente próximos, qual é a distância da estrela indicada por uma estrela?



Solução:

Para estrelas próximas podemos escrever

$$v_r \simeq A d \sin 2\ell$$

do gráfico temos

$$v_r \simeq 13.7 \text{ km/s e } \ell \simeq 50.6^\circ, \text{ de modo que } \sin 2\ell \simeq 0.98$$

com $A = 16 \text{ km/s/kpc}$, a distância é

$$d \simeq \frac{v_r}{A \sin 2\ell} \simeq \frac{13.7}{(16)(0.98)} \simeq 0.87 \text{ kpc} \simeq 870 \text{ pc}$$

★ ★ ★

285. Considere as duas estrelas marcadas com as letras A e B na figura do exercício anterior. Considerando que essas estrelas são objetos próximos, e que a estrela A está cerca de 900 pc mais distante que a da estrela B, determine a constante A de Oort.

Solução:

Da figura, temos aproximadamente

$$\ell_A \simeq 45^\circ, \quad v_A \simeq 36.2 \text{ km/s}$$

$$\ell_B \simeq 225^\circ, \quad v_B \simeq 22.4 \text{ km/s}$$

$$v_r = A d \sin 2\ell$$

com $A = 16 \text{ km/s/kpc}$

$$A d_A = \frac{v_A}{\sin 2\ell_A} = \frac{36.2}{\sin 90} \simeq 36.2$$

$$A d_B = \frac{v_B}{\sin 2\ell_B} = \frac{22.4}{\sin 450} \simeq 22.4$$

$$A(d_A - d_B) \simeq 36.2 - 22.4$$

$$A = \frac{36.2 - 22.4}{0.9} \simeq 15.3 \text{ km/s/kpc}$$

★ ★ ★

286. Uma estrela cefeida clássica tem magnitude aparente $m_v = V = 10.6$ e magnitude absoluta $M_v = -4.0$. (a) Qual seria sua distância desprezando a extinção interestelar? (b) Admita que a estrela está relativamente próxima e faz parte do movimento de rotação circular em torno do centro galáctico. A estrela tem uma longitude galáctica $\ell = 160^\circ$ e velocidade radial relativa ao LSR $v_r = -21 \text{ km/s}$. Qual seria sua distância neste caso? (c) Admitindo que o resultado em (b) é mais correto, qual é a extinção interestelar na direção da estrela?

Solução:

$$(a) m_v - M_v = 5 \log d - 5$$

$$\log d = \frac{10.6 + 4.0 + 5}{5} = 3.92$$

$$d \simeq 8000 \text{ pc} \simeq 8.0 \text{ kpc}$$

$$(b) v_r \simeq A d \sin 2\ell$$

$$\text{com } A = 16 \text{ km/s/kpc}$$

$$d = \frac{v_r}{A \sin 2\ell} = \frac{-21}{(16)(-0.64)} \simeq 2.1 \text{ kpc}$$

$$(c) m_v - M_v = 5 \log d - 5 + A_v$$

$$A_v = m_v - M_v - 5 \log d + 5 = 10.6 + 4.0 - 16.6 + 5 \simeq 3.0$$

$$\text{com } A_v \simeq 3.1.$$

$$E(B - V) \simeq \frac{A_v}{R_v} \simeq 0.97$$

★ ★ ★

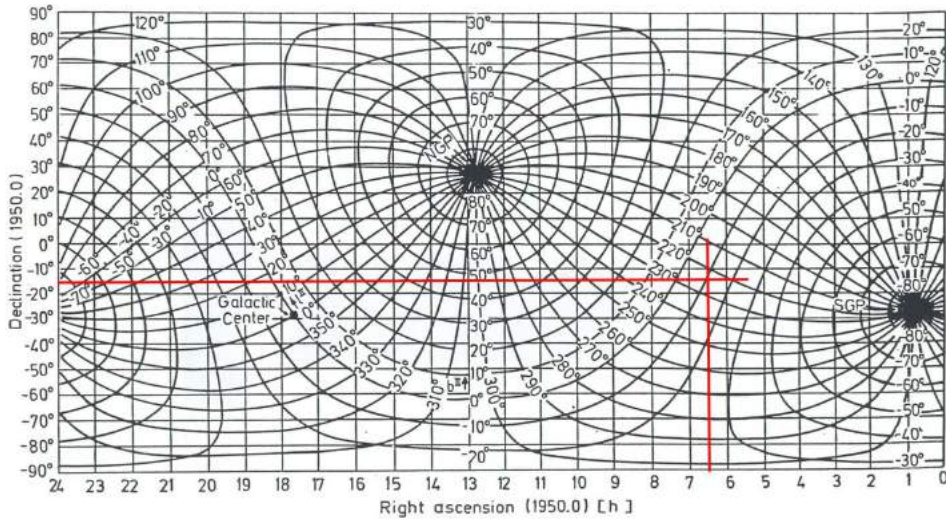
287. A estrela Sirius (α CMa) está a uma distância $d = 2.7 \text{ pc}$ e suas coordenadas equatoriais são aproximadamente $\alpha \simeq 6^{\text{h}}40^{\text{m}}$, $\delta = -16^\circ 35'$. Qual deve ser sua velocidade radial esperada?

Solução:

Da figura a seguir temos aproximadamente $\ell \simeq 225^\circ$ e $b \simeq -10^\circ$

para objetos próximos temos

$$v_r \simeq A d \sin 2\ell \simeq (16)(0.0027) \sin 450 \simeq 0.04 \text{ km/s}$$



..... 186

★ ★ ★

288. Duas estrelas A e B estão localizadas na mesma longitude galáctica, $\ell = 30^\circ$, e ambas têm latitude $b = 0^\circ$. Suas velocidade radiais observadas são $v_r(A) = 12 \text{ km/s}$ e $v_r(B) = 83 \text{ km/s}$, e suas velocidades tangenciais são $v_t(A) = -8 \text{ km/s}$ e $v_t(B) = -85 \text{ km/s}$. (a) Admitindo que essas estrelas participam do movimento de rotação galáctica, determine suas distâncias d_A e d_B . (b) Determine as distâncias d_A e d_B usando a aproximação de Oort. Qual dos resultados deve ser mais correto? (Adote $R_0 = 8 \text{ kpc}$, $\Theta_0 = 200 \text{ km/s}$, $A = 16 \text{ km/s/kpc}$)

Solução:

$$(a) \quad v_r = R_0 (\omega - \omega_0) \sin \ell$$

$$v_t = R_0 (\omega - \omega_0) \cos \ell - \omega d$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{v_r}{R_0 \sin \ell}$$

com

$$\omega_0 = \frac{\Theta_0}{R_0} = 25 \text{ km/s/kpc}$$

podemos escrever as relações

$$\omega_A = 25 + \frac{12}{(8)(0.5)} = 28 \text{ km/s/kpc}$$

$$\omega_B = 25 + \frac{83}{(8)(0.5)} = 45.75 \text{ km/s/kpc}$$

$$d = \frac{R_0 (\omega - \omega_0) \cos \ell - v_t}{\omega}$$

$$d_A = \frac{(8)(3)(0.87) + 8}{28} = 1.03 \text{ kpc}$$

$$d_B = \frac{(8)(20.75)(0.87) + 85}{45.75} = 5.01 \text{ kpc}$$

com a aproximação de Oort

$$(b) \ v_r \simeq A d \sin 2\ell$$

$$d_A = \frac{v_A}{A \sin 2\ell} = \frac{12}{(16) (\sin 60)} \simeq 0.87 \text{ kpc}$$

$$d_B = \frac{83}{(16) (\sin 60)} \simeq 5.99 \text{ kpc}$$

A resposta (a) é mais precisa. Para a estrela A, mais próxima, a diferença é menor, e a aproximação de Oort é melhor; para a estrela B é pior.

★ ★ ★

289. O Sol está localizado a 8.0 kpc do centro galáctico e participa do movimento de rotação com uma velocidade de 220 km/s. Considerando que sua idade é de 4.5 bilhões de anos, e admitindo que sua velocidade de rotação não sofreu alterações, quantas voltas em torno do centro galáctico já foram dadas pelo Sol?

Solução:

$$n \simeq \frac{t_{\odot}}{P_{\odot}} \simeq \frac{t_{\odot} \Theta_0}{2\pi R_0}$$

$$n \simeq \frac{(4.5 \times 10^9) (3.16 \times 10^7) (220)}{(2\pi) (8000) (3.09 \times 10^{13})} \simeq 20$$

★ ★ ★

290. Podemos usar o movimento do gás nas regiões centrais da Galáxia para estimar a massa total naquela região. Uma nuvem de gás a uma distância de 0.3 pc do centro galáctico tem uma velocidade de 260 km/s, com relação ao centro. Use esses valores e estime a massa total interior à região onde está localizada a nuvem de gás.

Solução:

$$\frac{G M m}{r^2} \simeq \frac{m v^2}{r}$$

$$M \simeq \frac{v^2 r}{G} \simeq \frac{(260 \times 10^5)^2 (0.3) (3.09 \times 10^{18})}{(6.67 \times 10^{-8}) (1.99 \times 10^{33})}$$

$$M \simeq 4.7 \times 10^6 M_{\odot}$$

★ ★ ★

DINÂMICA ESTELAR

291. Considere o movimento de translação da Terra em torno do Sol e mostre que o teorema do virial pode ser aplicado neste caso.

Solução:

A distância média entre a Terra e o Sol é $d_T \simeq 1.5 \times 10^{13}$ cm com um período $P \simeq 1$ ano $\simeq 365$ dias $\simeq 3.16 \times 10^7$ s. Sua velocidade média é

$$v = \frac{2\pi d_T}{P} \simeq 3.0 \times 10^6 \text{ cm/s} \simeq 30 \text{ km/s}$$

com um raio médio $R_T = 6400$ km e uma densidade média $\rho_T \simeq 5.5 \text{ g/cm}^3$, a Terra tem massa

$$M_T \simeq \frac{4}{3} \pi R_T^3 \rho_T \simeq 6.0 \times 10^{27} \text{ g}$$

a energia cinética média do movimento de translação é

$$E_c = \frac{1}{2} M_T v^2 \simeq 2.7 \times 10^{40} \text{ erg}$$

a energia potencial gravitacional correspondente é

$$E_p = -\frac{G M_\odot M_T}{d_T} \simeq -5.3 \times 10^{40} \text{ erg}$$

a energia total é

$$E_{tot} = E_c + E_p = \frac{1}{2} M_T v^2 - \frac{G M_\odot M_T}{d_T} \simeq -2.6 \times 10^{40} \text{ erg} \simeq \frac{E_p}{2}$$

portanto obtemos então

$$E_c = -\frac{E_p}{2} \longrightarrow 2 E_c + E_p = 0$$

★ ★ ★

292. Júpiter tem uma massa 318 vezes maior que a Terra, e gira em torno do Sol a uma distância média de 5.2 UA com um período de cerca de 11.86 anos. Mostre que o teorema do virial aplica-se também a este movimento.

Solução:

$$M_J = 318 M_T = (318) (6.0 \times 10^{27}) = 1.91 \times 10^{30} \text{ g}$$

$$d_J = 5.2 \text{ UA} = (5.2) (1.5 \times 10^{13}) = 7.80 \times 10^{13} \text{ cm}$$

$$P_J = 11.86 \text{ ano} = (11.86) (3.16 \times 10^7) = 3.75 \times 10^8 \text{ s}$$

$$v_J = \frac{2\pi d_J}{P_J} = \frac{(2) (3.14) (7.80 \times 10^{13})}{3.75 \times 10^8} \simeq 1.31 \times 10^6 \text{ cm/s} \simeq 13.1 \text{ km/s}$$

$$E_c \simeq \frac{1}{2} M_J v_J^2 = (0.5) (1.91 \times 10^{30}) (1.31 \times 10^6)^2 = 1.64 \times 10^{42} \text{ erg}$$

$$2 E_c \simeq 3.28 \times 10^{42} \text{ erg}$$

$$E_p \simeq -\frac{G M_\odot M_J}{R_J} = -\frac{(6.67 \times 10^{-8}) (1.99 \times 10^{33}) (1.91 \times 10^{30})}{7.80 \times 10^{13}} \text{ erg}$$

$$E_p \simeq -3.25 \times 10^{42} \text{ erg}$$

$$2E_c \simeq E_p \longrightarrow 2E_c + E_p \simeq 0$$

★ ★ ★

293. Considere o movimento do Sol em torno do centro da Galáxia mostre que o teorema do virial se aplica neste caso.

Solução:

Considerando $R_0 \simeq 8.0 \text{ kpc}$ e $\Theta_0 \simeq 220 \text{ km/s}$, e tomando a massa do Sol como $M_\odot = 1.99 \times 10^{33} \text{ g}$, a energia cinética do movimento de rotação é

$$E_c = \frac{1}{2} M_\odot \Theta_0^2 \simeq 4.8 \times 10^{47} \text{ erg}$$

a massa da Galáxia M_G interna a R_0 pode ser estimada por

$$\frac{G M_G M_\odot}{R_0^2} \simeq \frac{M_\odot \Theta_0^2}{R_0}$$

com o resultado

$$M_G = \frac{\Theta_0^2 R_0}{G} \simeq 1.8 \times 10^{44} \text{ g} \simeq 9.0 \times 10^{10} M_\odot$$

portanto a energia potencial gravitacional é

$$E_p = -\frac{G M_G M_\odot}{R_0} \simeq -9.7 \times 10^{47} \text{ erg}$$

$$\text{ou seja } E_c = -\frac{E_p}{2} \longrightarrow 2 E_c + E_p = 0$$

★ ★ ★

294. A partir do teorema do virial, mostre que em um sistema em equilíbrio hidrostático a pressão média necessária para suportar um objeto autogravitante é igual a menos um terço de sua energia potencial gravitacional por unidade de volume

$$P = -\frac{1}{3} \frac{E_g}{V}$$

Solução:

Considerando o gás constituído de N partículas de massa m e velocidade v , a quantidade de movimento das partículas é $p = m v$ e sua energia cinética

$(1/2) m v^2$. A pressão do gás pode ser escrita como

$$P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} p v = \left(\frac{1}{3} \frac{N}{V} \right) \left(m v^2 \right) = \left(\frac{2}{3} \frac{1}{V} \right) \left(N \frac{1}{2} m v^2 \right)$$

a energia cinética total das N partículas é

$$E_c = N \frac{1}{2} m v^2$$

temos então

$$P = \frac{2}{3} \frac{E_c}{V}$$

usando o teorema do virial na forma $2 E_c + E_g = 0$, obtemos

$$P = -\frac{1}{3} \frac{E_g}{V}$$

★ ★ ★

295. Considere uma estrela esférica de massa M e raio R em equilíbrio hidrostático. Use o resultado do exercício anterior e mostre que

$$P \propto \frac{G M^2}{R^4}$$

Solução:

A energia potencial gravitacional é, aproximadamente,

$$E_g \simeq -\frac{G M^2}{R}$$

usando o resultado do exercício anterior temos

$$P \simeq \left(-\frac{1}{3} \right) \left(-\frac{G M^2}{R V} \right) \simeq \frac{G M^2}{3 R V}$$

usando a relação $V = (4/3) \pi R^3$, temos

$$P \simeq \left(\frac{G M^2}{3 R} \right) \left(\frac{3}{4 \pi R^3} \right) = \frac{G M^2}{4 \pi R^4}$$

ou seja, $P \propto G M^2 / R^4$.

★ ★ ★

296. Obtenha o resultado do teorema do virial na forma do Exercício 294, isto é, $P \simeq -(1/3) E_g/V$ a partir da equação de equilíbrio hidrostático.

Solução:

Da equação de equilíbrio hidrostático

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G M(r) \rho(r)}{r^2}$$

dividindo por $4 \pi r^2 \rho(r)$

$$\frac{dP(r)}{4 \pi r^2 \rho(r) dr} = -\frac{G M(r)}{4 \pi r^4}$$

mas $dM(r) = 4 \pi r^2 \rho(r) dr$, de modo que

$$\frac{dP(r)}{dM(r)} = -\frac{G M(r)}{4 \pi r^4}$$

$$4 \pi r^3 dP(r) = -\frac{G M(r)}{r} dM(r)$$

como $V(r) = (4/3) \pi r^3$

$$3 V(r) dP(r) = -\frac{G M(r)}{r} dM(r)$$

$$3 \int_{r=0}^{r=R} V(r) dP(r) = - \int_0^M \frac{G M(r)}{r} dM(r)$$

a segunda integral é igual a E_g . A primeira pode ser feita por partes

$$3 \int_{r=0}^{r=R} V(r) dP(r) = 3 V(r) P(r) \Big|_{r=0}^{r=R} - 3 \int_0^V P(r) dV(r) = E_g$$

a integral da esquerda é nula, portanto

$$-3 \int_0^V P(r) dV(r) = -3 \bar{P} V = E_g$$

a notação $\bar{P}$ mostra que se trata do valor médio da pressão.

portanto

$$\bar{P} = -\frac{1}{3} \frac{E_g}{V}$$

★ ★ ★

297. Considere o caso extremo de um gás ultra relativístico, em que as partículas responsáveis pela pressão movem-se com velocidades próximas da velocidade da luz. Como fica a expressão para o teorema do virial?

Solução:

Neste caso, a relação para a pressão média é

$$P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} p v$$

mas $v \simeq c$, de modo que

$$P \simeq \frac{1}{3} \frac{N}{V} p c$$

a energia cinética de cada partícula é igual a $p c$, então

$$E_c \simeq N p c$$

ou seja

$$P = \frac{1}{3} \frac{E_c}{V}$$

combinando esta equação com a relação $P \simeq -(1/3) E_g/V$ temos

$$\frac{1}{3} \frac{E_c}{V} \simeq -\frac{1}{3} \frac{E_g}{V}$$

de modo que

$$E_c + E_g = 0$$

neste caso a energia total é $E_t = E_c + E_g = 0$.

★ ★ ★

298. Considere uma nuvem molecular com temperatura T , densidade ρ e raio R .

(a) Aplique o teorema do virial ao processo de formação estelar e mostre que o raio da nuvem deve satisfazer à condição aproximada dada por

$$R \simeq \left(\frac{k}{4 G m_H} \right)^{1/2} \left(\frac{T}{\rho} \right)^{1/2} \simeq 2 \times 10^7 \left(\frac{T}{\rho} \right)^{1/2}$$

(b) Obtenha o valor de R para uma nuvem molecular típica com $T \simeq 10 \text{ K}$ e $\rho \simeq 10^{-18} \text{ g/cm}^{-3}$. A que massa corresponde este valor?

Solução:

(a) Neste caso o teorema do virial pode ser escrito

$$E_t = -\frac{E_p}{2}$$

onde E_t e E_p são as energias térmica e potencial gravitacional. A energia térmica pode ser escrita

$$E_t \simeq N k T$$

chamando M a massa da nuvem, temos, aproximadamente

$$E_p \simeq -\frac{G M^2}{R}$$

supondo que o gás é composto de moléculas de H, $M \simeq 2 N m_H$.

Usando o teorema do virial, obtemos

$$N k T \simeq \frac{G M^2}{2 R} \simeq \frac{G M}{R} N m_H$$

$$\frac{k T}{m_H} \simeq \frac{G M}{R}$$

a massa da nuvem é aproximadamente $M = (4/3) \pi R^3 \rho \simeq 4 R^3 \rho$, portanto

$$\frac{k T}{m_H} \simeq 4 G R^2 \rho$$

de onde tiramos

$$R \simeq \left(\frac{k}{4 G m_H} \right)^{1/2} \left(\frac{T}{\rho} \right)^{1/2} \simeq 2 \times 10^7 \left(\frac{T}{\rho} \right)^{1/2}$$

(b) Neste caso obtemos

$$R \simeq 2 \times 10^7 \left(\frac{T}{\rho} \right)^{1/2} \simeq 10^{17} \text{ cm} \simeq 0.03 \text{ pc}$$

correspondendo a uma massa $M \simeq 10^{33} \text{ g}$, da ordem da massa do Sol.

★ ★ ★

299. Considere um sistema composto por partículas de massa m_i situadas na posição $\vec{r}_i$ e sob a ação da força $\vec{F}_i$ tal que

$$\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \dot{\vec{p}}_i$$

onde $\vec{p}_i$ é a quantidade de movimento da partícula i . Mostre que o teorema do virial pode também ser escrito na forma

$$\bar{E}_c = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

Solução:

A energia cinética E_c do sistema é

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

podemos então escrever a relação

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i + \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i = 2 E_c + \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

tomando as médias de ambos os membros em uma escala de tempo τ

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left[\frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i \right] dt = \langle 2 E_c + \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle$$

Em um sistema isolado e estável o vetor de posição $\vec{r}_i$ é sempre finito.

$\vec{p}_i$ também é sempre finito, pois a energia total do sistema é finita.

Portanto, a somatória $\sum \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$ é finita, assim como a integral acima.

O primeiro membro é uma quantidade finita dividida pela escala de tempo τ , que pode ser tão grande quanto se queira, ou seja, $\tau \rightarrow \infty$, de modo que o primeiro membro tende a zero. Nesse caso, podemos escrever

$$\langle 2 E_c + \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle = 2 \langle E_c \rangle + \langle \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle = 0$$

desta relação temos

$$\langle E_c \rangle = -\frac{1}{2} \langle \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle$$

O “virial”, ou “virial de Clausius” é definido como $1/2 \langle \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle$

★ ★ ★

300. Considere um aglomerado estelar de raio R com N estrelas de massa m . Chamando $\bar{v}^2$ a velocidade quadrática média das estrelas do aglomerado, use o teorema do virial e mostre que é válida a relação

$$\bar{v}^2 \simeq \frac{G M}{2 R}$$

Solução:

O número de pares de estrelas do sistema é

$$N_p = \frac{N(N-1)}{2} \simeq \frac{N^2}{2}$$

a energia potencial gravitacional dos pares de estrelas do sistema é

$$\bar{E}_p \simeq -\frac{G m^2}{\bar{R}} N_p$$

onde $\bar{R}$ é a distância média entre as estrelas do par, admitida $\bar{R} \simeq R$.

a energia cinética média total do aglomerado é

$$\bar{E}_c \simeq \frac{1}{2} N m \bar{v}^2$$

usando o teorema do virial na forma $2 \bar{E}_c + \bar{E}_p = 0$ obtemos

$$N m \bar{v}^2 \simeq \frac{N^2 G m^2}{2 R}$$

de modo que

$$\bar{v}^2 \simeq \frac{N G m}{2 R} \simeq \frac{G M}{2 R}$$

★ ★ ★

301. Considere o aglomerado globular M13 = NGC 6205 em Hercules, o qual tem um tempo de relaxação bem abaixo da idade da Galáxia. A dispersão de velocidades é da ordem de $v \simeq 8$ km/s, e o aglomerado está a uma distância de 8 kpc, com um diâmetro angular de cerca de 8 minutos de arco. Determine seu raio e sua massa.

Solução:

O raio é dado por

$$R \simeq \frac{\phi}{2} d$$

com $\phi = 8'$ obtemos

$$R \simeq \left(\frac{4}{60} \frac{\pi}{180} \right) (8) (10^3) (3.09 \times 10^{18}) \simeq 2.9 \times 10^{19} \text{ cm} = 9.3 \text{ pc}$$

aplicando a relação obtida no exercício anterior, obtemos para a massa total do aglomerado

$$M \simeq \frac{2 R \bar{v}^2}{G} \simeq \frac{(2) (2.9 \times 10^{19}) (8 \times 10^5)^2}{6.67 \times 10^{-8}} \simeq 5.6 \times 10^{38} \text{ g} \simeq 2.8 \times 10^5 M_{\odot}$$

★ ★ ★

302. O Aglomerado de Coma Berenicens está a uma distância de cerca de 99 Mpc, e seu diâmetro aparente é de cerca de 3 graus. A dispersão de velocidades radiais do aglomerado, dada por $\sigma_v \simeq [(1/M) \sum m_i v_i^2]^{1/2} \simeq 1000$ km/s, onde M é a massa total do aglomerado, m_i a massa das galáxias componentes, e v_i sua velocidade. (a) Estime seu raio em Mpc. (b) Estime a massa total do aglomerado. (c) O aglomerado tem aproximadamente 1000 galáxias. Estime a massa média dessas galáxias.

Solução:

$$(a) \frac{\phi}{2} \simeq \frac{R}{d}$$

$$R \simeq \frac{\phi d}{2} \simeq \frac{(3) (\pi)}{(2) (180)} \times 99 \simeq 2.6 \text{ Mpc} \simeq 8.0 \times 10^{24} \text{ cm}$$

$$(b) M \simeq \frac{\sigma_v^2 R}{G} \simeq \frac{(1000 \times 10^5)^2 (8.01 \times 10^{24})}{6.67 \times 10^{-8}}$$

$$M \simeq 1.2 \times 10^{48} \text{ g} \simeq 6.0 \times 10^{14} M_{\odot}$$

$$(c) \ m \simeq \frac{M}{N} \simeq \frac{6.0 \times 10^{14}}{1000} \simeq 6.0 \times 10^{11} M_{\odot} \simeq 1.2 \times 10^{45} \text{ g}$$

★ ★ ★

303. Considere um aglomerado rico em galáxias com uma dispersão de velocidades $\sigma_v \simeq 1000 \text{ km/s}$ e um raio $R \simeq 2 \text{ Mpc}$ e determine sua massa. Supondo que o aglomerado tem cerca de 100 galáxias, qual será a massa média de cada uma delas?

Solução:

Considerando que o sistema é gravitacionalmente ligado, temos

$$M \simeq \frac{\sigma_v^2 R}{G}$$

$$m \simeq \frac{M}{N} \simeq \frac{\sigma_v^2 R}{N G}$$

neste caso obtemos

$$M \simeq 9.3 \times 10^{47} \text{ g} \simeq 4.7 \times 10^{14} M_{\odot}$$

$$m \simeq 4.7 \times 10^{12} M_{\odot}$$

★ ★ ★

304. O tempo de relaxação em um sistema estelar contendo n estrelas por unidade de volume, cada uma delas com massa m movendo-se com velocidade v pode ser escrito de maneira aproximada como

$$t_r \simeq \frac{v^3}{\pi G^2 n m^2}$$

(a) Mostre que esta expressão fica

$$t_r \simeq 1.7 \times 10^{10} \frac{v^3}{n}$$

considerando $m = M_{\odot}$, e medindo v em km/s , n em parsec^{-3} e t_r em anos. (b) Estime o tempo de relaxação para a nossa Galáxia, adotando uma velocidade da ordem das velocidades de rotação no disco galáctico, $v \simeq 100 \text{ km/s}$ e considerando $N \simeq 200 \times 10^9$ estrelas concentradas essencialmente no disco espesso, com raio $R \simeq 30 \text{ kpc}$ e altura $h \simeq 1 \text{ kpc}$.

Solução:

(a) Da relação dada

$$t_r \simeq \frac{(10^{15}) (3.09 \times 10^{18})^3}{(\pi) (6.67 \times 10^{-8})^2 (3.16 \times 10^7) (1.99 \times 10^{33})^2} \frac{v^3}{n}$$

$$t_r \simeq 1.7 \times 10^{10} \frac{v^3}{n}$$

(b) O volume do disco é

$$V \simeq \pi R^2 h \simeq (3.14) (30 \times 10^3 \times 3.09 \times 10^{18})^2 (10^3 \times 3.09 \times 10^{18})$$

$$V \simeq 8.3 \times 10^{67} \text{ cm}^3$$

de modo que a densidade de estrelas é

$$n \simeq \frac{200 \times 10^9}{8.3 \times 10^{67}} \simeq 2.4 \times 10^{-57} \text{ cm}^{-3} \simeq 0.07 \text{ pc}^{-3} \simeq 0.1 \text{ pc}^{-3}$$

neste caso obtemos $t_r \simeq 2.4 \times 10^{17}$ ano, muito maior que a idade da Galáxia, ou seja, nosso sistema não é relaxado colisionalmente.

★ ★ ★

305. Considere o aglomerado NGC 104, e suponha que ele contenha cerca de 10^5 estrelas em um raio da ordem de $R \simeq 3 \text{ pc}$. Admitindo que as velocidades das estrelas são da ordem de $v \simeq 5 \text{ km/s}$, qual seria seu tempo de relaxação?

Solução:

$$n \simeq \frac{10^5}{(4) (27)} \simeq 9.3 \times 10^2 \text{ pc}^{-3}$$

$$t \simeq 1.7 \times 10^{10} \frac{125}{9.3 \times 10^2} \simeq 2.3 \times 10^9 \text{ ano}$$

★ ★ ★

306. O aglomerado aberto M11 tem cerca de 7000 estrelas, seu raio é de aproximadamente $R \simeq 3 \text{ pc}$, e as velocidades típicas das estrelas são $v \simeq 1.2 \text{ km/s}$. Determine a densidade de estrelas no aglomerado e seu tempo de relaxação.

Solução:

Temos

$$n \simeq \frac{N}{4 R^3} \simeq \frac{7000}{(4) (27)} \simeq 65 \text{ pc}^{-3}$$

$$t_r \simeq 1.7 \times 10^{10} \frac{(1.2)^3}{65} \simeq 4.5 \times 10^8 \text{ ano}$$

Esta escala é menor que a idade da Galáxia, de modo que um aglomerado nestas condições pode estar relaxado.

★ ★ ★

307. Considere um sistema estelar de raio R contendo N estrelas movendo-se com velocidade v . Definindo o tempo de cruzamento por

$$t_c \simeq \frac{R}{v}$$

e admitindo que o sistema é virializado, (a) mostre que, de maneira aproximada,

$$\frac{t_r}{t_c} \simeq N$$

(b) Aplique este resultado a um aglomerado globular com raio $R \simeq 2.9$ pc, densidade de estrelas $n \simeq 10^3 \text{ pc}^{-3}$ e $v \simeq 10 \text{ km/s}$.

Solução:

Usando a expressão para o tempo de relaxação do Exercício 304 temos

$$\frac{t_r}{t_c} \simeq \frac{v^3}{\pi G^2 n m^2} \frac{v}{R} \simeq \frac{v^4}{\pi G^2 n m^2 R}$$

se o sistema estiver virializado, podemos usar relação

$$v^2 \simeq \frac{GM}{R} \simeq \frac{GNm}{R}$$

portanto

$$\frac{t_r}{t_c} \simeq \left[\frac{G^2 N^2 m^2}{R^2} \right] \left[\frac{1}{\pi G^2 n m^2 R} \right] \simeq \frac{N^2}{\pi n R^3}$$

em ordem de grandeza temos $N \simeq n \pi R^3$, portanto

$$\frac{t_r}{t_c} \simeq N$$

(b) O tempo de relaxação é

$$t_r \simeq \frac{(1.7 \times 10^{10})(10^3)}{10^3} \simeq 1.7 \times 10^{10} \text{ ano}$$

o tempo de cruzamento é

$$t_c \simeq \frac{R}{v} \simeq \frac{2.9 \text{ pc}}{10 \text{ km/s}} = \frac{(2.9)(3.09 \times 10^{18})}{(10)(10^5)(3.16 \times 10^7)} \simeq 2.9 \times 10^5 \text{ ano}$$

portanto

$$\frac{t_r}{t_c} \simeq \frac{1.7 \times 10^{10}}{2.9 \times 10^5} \simeq 5.9 \times 10^4$$

Este valor é semelhante ao número de estrelas no aglomerado, $N \simeq \pi n R^3 \simeq 7.7 \times 10^4$.

★ ★ ★

308. O aglomerado aberto Trumpler 37 tem um raio da ordem de 5.7 pc e a dispersão de velocidades das estrelas é de 1.4 km/s. (a) Estime o tempo de cruzamento do aglomerado e sua massa total. (b) Compare seu tempo de cruzamento com o valor mais correto determinado na literatura, $t_1 \simeq 3.5 \times 10^6$ ano e com uma estimativa da idade do aglomerado, $t_2 \simeq 5.0 \times 10^6$ ano.

Solução:

$$(a) \ t_c \simeq \frac{R}{\sigma} \simeq \frac{(5.7) (3.09 \times 10^{18})}{(1.4) (10^5) (3.16 \times 10^7)} \simeq 4.0 \times 10^6 \text{ ano}$$

$$\sigma^2 \simeq \frac{GM}{R}$$

$$M \simeq \frac{\sigma^2 R}{G} \simeq \frac{(1.4)^2 (10^{10}) (5.7) (3.09 \times 10^{18})}{(6.67 \times 10^{-8}) (1.99 \times 10^{33})} \simeq 2.6 \times 10^3 M_\odot$$

$$(b) \ t_c \simeq t_1, \quad t_c < t_2$$

★ ★ ★

309. (a) Estime o tempo médio necessário para uma colisão entre duas estrelas do disco galáctico. Considere o disco como um cilindro com raio $R_d = 30$ kpc e altura $h_d = 1$ kpc, contendo $N = 2 \times 10^{11}$ estrelas. As estrelas têm raios iguais ao do Sol, $R = R_\odot = 6.96 \times 10^{10}$ cm e sua dispersão de velocidades é $v \simeq 10$ km/s. (b) A idade do disco é de aproximadamente 13 Gano. Compare o valor obtido em (a) com esta escala de tempo. Interprete este resultado.

Solução:

A escala de tempo de colisão pode ser estimada por

$$\tau_c \simeq \frac{\lambda}{v}$$

onde λ é a distância média percorrida pela estrela

$$\lambda \simeq \frac{1}{n\sigma} \simeq \frac{V}{N\pi R_d^2}$$

$$\tau_c \simeq \frac{V}{N\pi R_d^2 v} \simeq \frac{R_d^2 h_d}{N R_\odot^2 v}$$

$$\tau_c \simeq \frac{(900) (1) (3.09 \times 10^{21})^3}{(2 \times 10^{11}) (6.96 \times 10^{10})^2 (10 \times 10^5)} \simeq 2.7 \times 10^{28} \text{ s} \simeq 8.7 \times 10^{11} \text{ Gano}$$

$$(b) \ \frac{\tau_c}{\tau_d} \simeq \frac{8.7 \times 10^{11}}{13} \simeq 6.7 \times 10^{10}$$

portanto $\tau_c \gg \tau_d$, e assim não há colisões.

A escala de tempo τ_c pode alternativamente ser estimada por

$$\tau_c \simeq 1.7 \times 10^{10} \frac{v^3}{n} \simeq 10^5 \text{ Gano}$$

resultado também consistente com o fato de que $\tau_c \gg \tau_d$

★ ★ ★

310. Um aglomerado globular esférico contém $N = 2 \times 10^5$ estrelas com massa $m = 1 M_\odot$. A velocidade média das estrelas do aglomerado é $v \simeq 10 \text{ km/s}$. Considere que o aglomerado está em equilíbrio (virializado) e (a) Estime seu raio (em pc). (b) Estime o tempo médio de cruzamento (em anos) das estrelas do aglomerado.

Solução:

(a) Usando o teorema do virial, $2 E_c = -E_p$

$$E_c \simeq \frac{1}{2} N m v^2 \simeq \frac{1}{2} M v^2$$

$$E_p \simeq -\frac{G M^2}{R} \simeq -\frac{G N^2 m^2}{R}$$

$$N m v^2 \simeq \frac{G N^2 m^2}{R}$$

$$R \simeq \frac{G N m}{v^2}$$

$$R \simeq \frac{(6.67 \times 10^{-8}) (2 \times 10^5) (1.99 \times 10^{33})}{(10^2) (10^{10}) (3.09 \times 10^{18})} \simeq 8.6 \text{ pc} \simeq 2.7 \times 10^{19} \text{ cm}$$

$$(b) t_c \simeq \frac{R}{v} \simeq \frac{(8.6) (3.09 \times 10^{18})}{(10) (10^5) (3.16 \times 10^7)} \simeq 8.4 \times 10^5 \text{ ano} \simeq 2.7 \times 10^{13} \text{ s}$$

★ ★ ★

PARTE 4 - MEIO INTERESTELAR

PROPRIEDADES FÍSICAS

311. Considere uma nuvem interestelar composta de hidrogênio atômico, com uma densidade de 10 partículas por centímetro cúbico e uma temperatura cinética de 100 K. (a) Qual é a densidade da nuvem em g/cm³? (b) Estime a pressão no interior da nuvem. Compare seu resultado com a pressão de um vácuo típico de laboratório.

Solução:

$$(a) \rho \simeq n m_H \simeq 1.67 \times 10^{-23} \text{ g/cm}^3$$

$$(b) P \simeq n k T \simeq 1.38 \times 10^{-13} \text{ din/cm}^2 \simeq 1.36 \times 10^{-19} \text{ atm}$$

$$P_v \simeq 10^{-5} \text{ din/cm}^2 \simeq 10^{-6} \text{ N/m}^2 \simeq 10^{-6} \text{ Pa} \simeq 10^{-11} \text{ atm} \simeq 7.5 \times 10^{-9} \text{ Torr}$$

$$P/P_v \simeq 10^{-8} \quad \longrightarrow \quad P \ll P_v$$

★ ★ ★

312. Suponha que uma nuvem interestelar com uma densidade de 10 partículas por centímetro cúbico e temperatura de 100 K esteja em equilíbrio de pressão com o meio internuvens, cuja densidade é de 0.1 partículas por centímetro cúbico. Qual seria, em ordem de grandeza, a temperatura do meio internuvens?

Solução:

$$n_1 T_1 \simeq n_2 T_2$$

$$T_2 \sim \frac{n_1 T_1}{n_2} \sim 10^4 \text{ K}$$

★ ★ ★

313. Considere um gás de H ionizado (HII) com densidade $n \simeq 100 \text{ cm}^{-3}$ e temperatura $T \simeq 10^4 \text{ K}$ imerso em uma nuvem interestelar com $n \simeq 20 \text{ cm}^{-3}$ e $T \simeq 100 \text{ K}$. O gás ionizado estará em equilíbrio de pressão com a nuvem? O que poderá acontecer?

Solução:

Para o gás ionizado

$$P_i \propto n_i T_i \simeq 10^6 \text{ K cm}^{-3}$$

$$P_i \simeq n_i k T_i \simeq 1.38 \times 10^{-10} \text{ dina/cm}^2$$

para a nuvem

$$P_n \propto n_n T_n \simeq 2 \times 10^3 \text{ K cm}^{-3}$$

$$P_n \simeq n_n k T_n \simeq 2.76 \times 10^{-13} \text{ dina/cm}^2$$

como $P_i \gg P_n$ o gás ionizado se expande, e não há equilíbrio de pressão

★ ★ ★

314. Um grão sólido esférico em uma nuvem interestelar tem um raio $a \simeq 1000 \text{ Å} = 10^{-5} \text{ cm}$ e uma densidade interna $s_d \simeq 3 \text{ g/cm}^3$. (a) Qual é a massa do grão? (b) Considere uma nuvem interestelar típica, onde a concentração de grãos é $n_d \simeq 10^{-11} \text{ cm}^{-3}$. Qual seria o volume ocupado nesta nuvem por uma pessoa de 70 kg, se todo o seu corpo fosse pulverizado em grãos interestelares e espalhado pela nuvem?

Solução:

$$(a) m_d \simeq \frac{4}{3} \pi a^3 s_d \simeq 1.26 \times 10^{-14} \text{ g}$$

$$m_H \simeq 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$$

$$\frac{m_d}{m_H} \simeq 7.54 \times 10^9$$

$$(b) n \simeq \frac{N}{V}$$

$$V \simeq \frac{N}{n} \simeq \frac{M/m_d}{n} \simeq \frac{M}{n m_d} \simeq \frac{70\,000}{(10^{-11})(1.26 \times 10^{-14})}$$

$$V \simeq 5.56 \times 10^{29} \text{ cm}^3$$

comparando com o volume da Terra, com $R_T \simeq 6400 \text{ km}$

$$V_T \simeq 1.1 \times 10^{27} \text{ cm}^3$$

$$\frac{V}{V_T} \simeq 500$$

★ ★ ★

315. Considere a densidade de massa de gás no plano galáctico como $\rho_g \simeq 3 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3$ e determine (a) a massa total de gás no disco galáctico. Admita que o disco tem um diâmetro de 30 kpc e espessura de 300 pc. (b) Que fração da massa total da Galáxia corresponde a massa de gás?

Solução:

(a) a massa de gás é

$$M_g \simeq \rho_g V \simeq \rho_g \pi R^2 h$$

$$M_g \simeq (3 \times 10^{-24}) (3.14) (15000 \times 3.09 \times 10^{18})^2 (300 \times 3.09 \times 10^{18})$$

$$M_g \simeq 1.9 \times 10^{43} \text{ g} \simeq 9.5 \times 10^9 M_\odot$$

tomando $M_G \simeq 1.5 \times 10^{11}$ para a massa da Galáxia

$$f = \frac{M_g}{M_G} \simeq 0.063$$

★ ★ ★

316. Suponha que as nuvens difusas têm raios $R_n \simeq 5 \text{ pc}$, havendo cerca de $\nu \simeq 5$ nuvens por kpc no disco galáctico. Considere que o disco tem um raio $R_d \simeq 15 \text{ kpc}$ e espessura total de 300 pc. (a) Qual é o número total de nuvens no disco? (b) Qual é a fração do volume do disco ocupada pelas nuvens? (fator de preenchimento). (c) Qual é a separação média das nuvens?

Solução:

$$(a) V_n \simeq \frac{4}{3} \pi R_n^3 \simeq 1.54 \times 10^{58} \text{ cm}^3 \simeq 524 \text{ pc}^3$$

$$V_d \simeq \pi R_d^2 h \simeq 6.26 \times 10^{66} \text{ cm}^3 \simeq 2.12 \times 10^{11} \text{ pc}^3$$

$$\nu \simeq \frac{N}{V_d} V_n^{2/3}$$

$$N \simeq \nu \frac{V_d}{V_n^{2/3}} \simeq 1.6 \times 10^7$$

$$(b) f \simeq \frac{N V_n}{V_d} \simeq 0.04$$

$$(c) r \simeq \left(\frac{V_d}{N} \right)^{1/3} \simeq 24 \text{ pc}$$

★ ★ ★

317. Medidas da linha de 21 cm do hidrogênio em uma certa direção no plano galáctico indicam uma densidade de coluna $N_H = 2 \times 10^{20} \text{ cm}^{-2}$. (a) Supondo que o hidrogênio está concentrado em 10 nuvens interestelares idênticas com dimensões de 5 pc cada uma, qual seria a densidade volumétrica n_H destas nuvens? (b) Medidas da linha do H em absorção mostram que a temperatura das nuvens interestelares é da ordem de 80 K. Neste caso, qual seria a pressão do gás nas nuvens?

Solução:

$$(a) n_H \simeq \frac{N_H}{N D}$$

com $N = 10$ e $D = 5 \text{ pc}$

$$n_H \simeq \frac{2 \times 10^{20}}{(10) (5) (3.09 \times 10^{18})} \simeq 1.3 \text{ cm}^{-3}$$

$$(b) P \simeq n k T \simeq (1.3) (1.38 \times 10^{-16}) (80) \simeq 1.4 \times 10^{-14} \text{ din/cm}^2$$

★ ★ ★

318. A densidade de coluna de núcleos de H no plano galáctico tem o valor medido $N_H = 10 \times 10^{20} \text{ cm}^{-2}$. Considerando que as abundâncias por massa de H, He e elementos pesados nesta região são dadas por $X = 0.704$, $Y = 0.281$ e $Z = 0.015$, qual é a densidade de massa correspondente Σ_m , medida em $M_\odot/\text{pc}^2$?

Solução:

Se houvesse apenas H, a densidade seria

$$\Sigma_m = N_H m_p = \frac{(10 \times 10^{20}) (1.67 \times 10^{-24}) (3.09 \times 10^{18})^2}{1.99 \times 10^{33}} \simeq 8.0 M_\odot/\text{pc}^2$$

considerando H, He, Z

$$\Sigma_m = N_H m_p + \Sigma_{He} + \Sigma_Z$$

$$\Sigma_{He} = \frac{0.281}{0.704} N_H m_p \simeq 0.40 N_H m_p$$

$$\Sigma_Z = \frac{0.015}{0.704} N_H m_p \simeq 0.02 N_H m_p$$

$$\Sigma_M \simeq (1 + 0.40 + 0.02) N_H m_p \simeq 1.42 N_H m_p \simeq 11.4 M_\odot/\text{pc}^2$$

★ ★ ★

319. Estime as velocidades médias típicas dos átomos do gás em algumas situações astrofísicas. (a) Uma nuvem interestelar difusa de H neutro com uma temperatura cinética $T \simeq 100 \text{ K}$. (b) A fotosfera do Sol, tomando $T \simeq T_{ef} = 5800 \text{ K}$, e admitindo que o gás é composto essencialmente de H. (c) O gás quente que envolve o disco galáctico, observável pela presença do íon OVI, considerando que o potencial de ionização para transformar OV em OVI é $PI = 114 \text{ eV}$.

Solução:

(a) Neste caso o peso molecular é $\mu \simeq 1$. Admitindo uma distribuição maxwelliana, a velocidade média das partículas é

$$v \simeq \sqrt{\frac{k T}{\mu m_H}} \simeq \sqrt{\frac{(1.38 \times 10^{-16}) (100)}{(1) (1.67 \times 10^{-24})}} = 9.1 \times 10^4 \text{ cm/s} \simeq 0.9 \text{ km/s}$$

(b) Neste caso, com $\mu \simeq 1$

$$v \simeq \sqrt{\frac{k T}{\mu m_H}} \simeq \sqrt{\frac{(1.38 \times 10^{-16}) (5800)}{(1) (1.67 \times 10^{-24})}} = 6.9 \times 10^5 \text{ cm/s} \simeq 6.9 \text{ km/s}$$

(c) Para que este íon exista, é necessário que a energia média do gás seja da ordem do potencial de ionização, $E \simeq kT$. Portanto

$$T \simeq \frac{PI}{k} \simeq \frac{(114)(1.6 \times 10^{-12})}{1.38 \times 10^{-16}} \simeq 1.3 \times 10^6 \text{ K.}$$

com este valor a velocidade típica dos átomos de oxigênio é

$$v \simeq \sqrt{\frac{kT}{\mu m_H}} \simeq \sqrt{\frac{(1.38 \times 10^{-16})(1.3 \times 10^6)}{(16)(1.67 \times 10^{-24})}} \simeq 2.6 \times 10^6 \text{ cm/s} \simeq 26 \text{ km/s}$$

★ ★ ★

320. O íon OVI é detectado no meio interestelar quente e ionizado por meio de observações do dubleto ultravioleta em $\lambda = 1032 \text{ \AA}$ e $\lambda = 1038 \text{ \AA}$. (a) Supondo que a ionização do oxigênio é colisional, qual seria a temperatura típica da região interestelar? (b) A região quente e ionizada parece estar em equilíbrio de pressão com a região neutra, a uma pressão da ordem de $10^{-13} \text{ dinas/cm}^2$. Qual seria a densidade eletrônica média da região quente ionizada? Considere um gás composto essencialmente de H e He, com abundância normal. (c) Compare seu resultado em (b) com a densidade eletrônica média calculada a partir do fluxo observado de raios X moles, $0.0037 \leq n_e(\text{cm}^{-3}) \leq 0.0047$.

Solução:

$$(a) E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-27})(3 \times 10^{10})}{1035 \times 10^{-8}} = 1.92 \times 10^{-11} \text{ erg} \simeq 12.0 \text{ eV}$$

$$E \simeq E_c \simeq \frac{1}{2} m_e v_e^2 \simeq \frac{3}{2} kT$$

$$T \simeq \frac{2}{3} \frac{E}{k} \simeq 9.28 \times 10^4 \text{ K}$$

(b) A pressão total é

$$P \simeq nkT \simeq (n_p + n_{He} + n_e)kT \simeq (n_p + 0.1n_p + n_e)kT \simeq (1.1n_p + n_e)kT$$

$$n_e = n_p + 2n_{He} = n_p + (2)(0.1)n_p = 1.2n_p$$

portanto

$$n = \frac{1.1n_e}{1.2} + n_e = 0.92n_e + n_e = 1.92n_e$$

$$P \simeq 1.92n_e kT$$

$$n_e \simeq \frac{P}{1.92kT} \simeq 0.0041 \text{ cm}^{-3}$$

(c) com os valores extremos

$$f_{min} \simeq \frac{0.0037}{0.0041} \simeq 0.90$$

$$f_{max} \simeq \frac{0.0047}{0.0041} \simeq 1.15$$

★ ★ ★

321. Na propagação de ondas planas em um meio tênue dissipativo, uma medida da mobilidade dos elétrons é a frequência de plasma ω_p , dada por

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2}{m_e} n_e$$

onde n_e é a densidade eletrônica do plasma e $e = 4.8032 \times 10^{-10} \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ é a carga do elétron no sistema cgs. (a) Mostre que esta relação é equivalente à relação

$$\nu_p \simeq 8970 \sqrt{n_e}$$

onde $\nu_p = \omega_p/2\pi$ e n_e está em cm^{-3} . (b) Considere uma região interestelar com densidade eletrônica $n_e = 0.1 \text{ cm}^{-3}$. Qual é a frequência de plasma ν_p para a propagação de ondas planas nesta região?

Solução:

$$(a) \nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}} = \frac{2\sqrt{\pi} e \sqrt{n_e}}{2\pi \sqrt{m_e}}$$

$$\nu_p = \frac{e}{\sqrt{\pi m_e}} \sqrt{n_e} \simeq \frac{4.80 \times 10^{-10}}{\sqrt{(3.14)(9.11 \times 10^{-28})}} \sqrt{n_e}$$

$$\nu_p \simeq 8970 \sqrt{n_e}$$

$$(b) \nu_p \simeq 8970 \sqrt{n_e} \simeq (8970) (10^{-1})^{1/2} \simeq 2.84 \text{ kHz}$$

★ ★ ★

322. A comparação de resultados de medidas de dispersão de pulsares, rotação de Faraday e medidas da emissão total em rádio sugerem que o campo magnético galáctico regular tem intensidade $B \simeq 2 - 5 \mu\text{G}$. Supondo que este valor possa ser generalizado para todo o disco galáctico, qual seria a densidade de energia magnética do disco? Dê seu resultado em eV/cm^3 .

Solução:

$$U = \frac{B^2}{8\pi} = \frac{[(2 - 5) \times 10^{-6}]^2}{8\pi}$$

$$U = (1.6 - 9.9) \times 10^{-13} \text{ erg}/\text{cm}^3$$

$$U = (0.10 - 0.62) \text{ eV}/\text{cm}^3$$

★ ★ ★

323. O valor médio da intensidade do campo magnético no meio interestelar difuso é de $5\mu\text{G}$. Mostre que a densidade de energia magnética do gás difuso (em eV/cm^3) é semelhante à densidade de energia térmica deste gás, considerando uma densidade numérica $n \simeq 50 \text{ cm}^{-3}$ e $T \simeq 100 \text{ K}$.

Solução:

$$e_B \simeq \frac{B^2}{8\pi} \simeq \frac{(5 \times 10^{-6})^2}{8\pi} \frac{1}{1.6 \times 10^{-12}} \simeq 0.62 \text{ eV}/\text{cm}^3$$

$$e_T \simeq \frac{3}{2} n k T \simeq \frac{(1.5)(50)(1.38 \times 10^{-16})(100)}{1.6 \times 10^{-12}} \simeq 0.65 \text{ eV}/\text{cm}^3$$

ou seja, $e_B \simeq e_T$

★ ★ ★

324. Considere um choque interestelar intenso adiabático, ou seja, sem emissão de radiação, com um fator de compressão $\rho_1/\rho_0 \simeq 4$. (a) Como varia a pressão magnética? Considere $B_0 \simeq 3 \times 10^{-6} \text{ G}$. (b) A pressão do gás é da ordem de $P_g \simeq 2 \times 10^{-11} \text{ dina}/\text{cm}^2$. Compare os dois resultados.

Solução:

(a) A pressão magnética P varia de $P_0 = B_0^2/8\pi$ para $P_1 = B_1^2/8\pi$ de modo que

$$P_1 = \frac{B_1^2}{8\pi} = \frac{B_0^2}{8\pi} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^2 = 16 P_0$$

obtemos $P_0 \simeq 3.6 \times 10^{-13} \text{ dina}/\text{cm}^2$ e $P_1 \simeq 5.8 \times 10^{-12} \text{ dina}/\text{cm}^2$

(b) Neste caso temos

$$\frac{P_g}{P_1} \simeq 3.5$$

ou seja $P_g \gg P_1$

★ ★ ★

325. (a) Medidas da emissão $\text{H}\alpha$ difusa do meio interestelar no plano galáctico ($z = 0$) produzem uma medida de emissão de $20 \text{ pc}/\text{cm}^6$. Considerando que o caminho livre médio para absorção de fótons $\text{H}\alpha$ no disco galáctico é de 2 kpc , qual seria o valor médio da densidade eletrônica da região interestelar emissora? (b) Na borda do disco galáctico, onde $z \simeq 500 \text{ pc}$, a medida de emissão é cinco vezes menor que no plano galáctico. Admitindo uma distribuição exponencial para a densidade eletrônica dada por

$$n(z) = n(z_0) e^{-z/z_0}$$

qual seria a escala de altura z_0 para a distribuição da emissão $H\alpha$?

Solução:

(a) A medida de emissão é

$$ME = \int n_e^2 d\ell \simeq n_e^2 L$$

onde L é a dimensão da região contendo n_e elétrons por unidade de volume

$$n_e \simeq \sqrt{\frac{ME}{L}} \simeq \sqrt{\frac{20}{2000}} \simeq 0.100 \text{ cm}^{-3}$$

$$(b) n(z) \simeq \sqrt{\frac{ME(z)}{2000}} \simeq \sqrt{\frac{(20/5)}{2000}} \simeq 0.045 \text{ cm}^{-3}$$

da distribuição exponencial temos

$$z_0 \simeq \frac{z}{\ln(n_0/n)} \simeq \frac{500}{\ln(0.100/0.045)} \simeq 630 \text{ pc}$$

★ ★ ★

326. Por meio de um tratamento teórico dos movimentos oscilatórios perpendiculares ao plano galáctico, House e Kilkenny (1980) derivaram uma expressão analítica para a aceleração gravitacional g_z , válida para $|z| \leq 1 \text{ kpc}$

$$g_z = A_0 \sin\left(\frac{2z}{R} + B_0\right) + C_0 \exp(-\alpha z)$$

onde A_0 , B_0 e C_0 são constantes, R é a distância ao eixo galáctico e $\alpha = 1/h$, sendo h a espessura efetiva da camada de gás e estrelas acima do plano galáctico. As constantes foram determinadas por medidas das velocidades radiais de estrelas OB na vizinhança solar, sendo $A_0 = 9.6 \times 10^{-9} \text{ cm/s}^2$, $B_0 = 5 \text{ rad}$ e $C_0 = 9.0 \times 10^{-9} \text{ cm/s}^2$. Considere um valor médio $2h \simeq 800 \text{ pc}$ e $R \simeq 8.5 \text{ kpc}$ e determine a densidade de massa total no plano galáctico para a vizinhança solar. Compare seu resultado com o valor obtido por Oort, baseado na análise das gigantes K.

Solução:

$$\frac{dg_z}{dz} = \frac{2}{R} A_0 \cos\left(2 \frac{z}{R} + B_0\right) - \alpha C_0 \exp(-\alpha z)$$

$$\left(\frac{dg_z}{dz}\right)_{z=0} = \frac{2}{R} A_0 \cos B_0 - \alpha C_0$$

com $R = 8.5 \text{ kpc}$ obtemos

$$\left(\frac{dg_z}{dz}\right)_{z=0} = -7.07 \times 10^{-30} \text{ s}^{-2}$$

usando a relação

$$\rho_0 = -\frac{1}{4\pi G} \left(\frac{dg_z}{dz} \right)_{z=0}$$

obtemos

$$\rho_0 = 8.43 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3$$

com o valor obtido por Oort $\rho_{oort} \sim 10 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3$ temos

$$\rho_{HK}/\rho_{oort} \simeq 0.84$$

★ ★ ★

327. Em um estudo da distribuição de velocidades de estrelas quentes da vizinhança solar foram obtidos os resultados mostrados na tabela a seguir, onde a aceleração gravitacional g_z na direção perpendicular ao disco galáctico é dada em função da altura z . (a) Estime a densidade do material no disco $\rho(z=0)$ na posição $z=0$ em g/cm^3 e em $M_\odot/\text{pc}^3$. (b) Repita o cálculo na posição $z=0.5 \text{ kpc}$, obtendo $\rho(z=0.5)$. Supondo que este valor seja representativo de todo o disco, e que o material do disco está na forma de estrelas com $1 M_\odot$, quantas estrelas haveria no disco? Considere um disco cilíndrico de raio 25 kpc e altura 1 kpc .

$z \text{ (kpc)}$	$-g(z)(10^{-9} \text{ cm/s}^2)$
0.00	0.21
0.02	0.63
0.04	1.04
0.06	1.42
0.20	3.61
0.30	4.74
0.40	5.60
0.48	6.13
0.50	6.24
0.52	6.35
0.54	6.45
0.60	6.72
0.70	7.07
0.80	7.32
0.90	7.48
1.00	7.58

Solução:

Do exercício anterior

$$(a) \rho(0) = -\frac{1}{4\pi G} \left(\frac{dg_z}{dz} \right)_{z=0}$$

$$\left(\frac{dg_z}{dz} \right)_{z=0} \simeq \left(\frac{\Delta g}{\Delta z} \right)_{z=0} \simeq \frac{(-0.63 + 0.21) 10^{-9}}{(0.02 - 0.00) (3.09 \times 10^{21})} \simeq -6.80 \times 10^{-30} \text{ s}^{-2}$$

$$\rho(0) = -\frac{1}{4\pi G} (-6.80 \times 10^{-30}) \simeq 8.11 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3$$

$$\rho(0) = \frac{(8.11 \times 10^{-24}) (3.09 \times 10^{18})^3}{1.99 \times 10^{33}} \simeq 0.12 M_{\odot}/\text{pc}^3$$

$$(b) \left(\frac{dg_z}{dz} \right)_{z=0.5} \simeq \frac{(-6.35 + 6.24) 10^{-9}}{(0.52 - 0.50) (3.09 \times 10^{21})} \simeq -1.78 \times 10^{-30} \text{ s}^{-2}$$

$$\rho(0.5) = -\frac{1}{4\pi G} (-1.78 \times 10^{-30}) \simeq 2.12 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3$$

$$\rho(0.5) = \frac{(2.12 \times 10^{-24}) (3.09 \times 10^{18})^3}{1.99 \times 10^{33}} \simeq 0.031, M_{\odot}/\text{pc}^3$$

$$V_d \simeq \pi R^2 h \simeq (3.14) (25000)^2 (1000) \simeq 1.96 \times 10^{12} \text{ pc}^3$$

$$\rho \simeq \frac{M}{V} \simeq \frac{Nm}{V}$$

$$N \simeq \frac{\rho V}{m} \simeq 6.1 \times 10^{10}$$

★ ★ ★

328. Determinações da distribuição da densidade de massa na forma de estrelas na vizinhança solar produzem os seguintes valores: $0.038 M_{\odot}/\text{pc}^3$ para as estrelas anãs de tipos espectrais G, K e M; $0.020 M_{\odot}/\text{pc}^3$ para as anãs brancas e $0.006 M_{\odot}/\text{pc}^3$ para as demais estrelas. Qual é a massa total na forma de estrelas, em $M_{\odot}/\text{pc}^3$ e em g/cm^3 ? Compare seu resultado com o limite de Oort.

Solução:

$$\rho_* = \sum \rho_i = 0.064 M_{\odot}/\text{pc}^3 = 4.3 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3$$

$$\text{adotando } \rho_{\text{oort}} \simeq 6 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3$$

$$\frac{\rho_*}{\rho_{\text{oort}}} \simeq 0.7$$

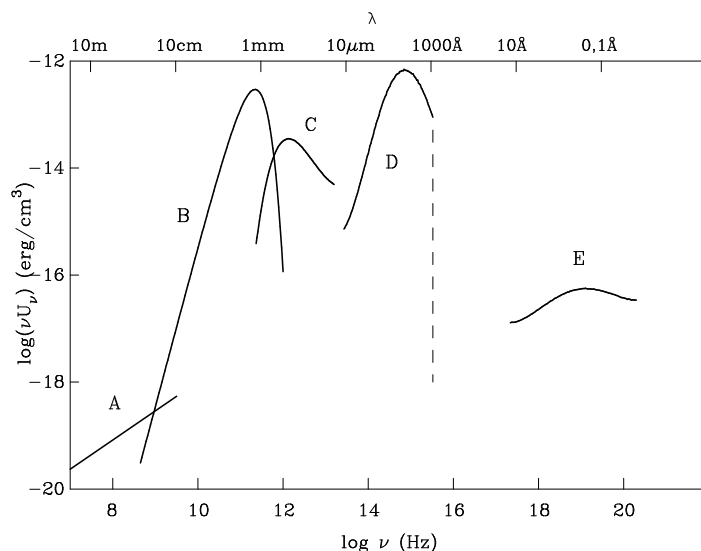
$$\text{tomando um valor mais preciso } \rho_{\text{oort}} \simeq 4 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3 \simeq 0.05 M_{\odot}/\text{pc}^3,$$

$$\frac{\rho_*}{\rho_{\text{oort}}} \simeq 1.08$$

★ ★ ★

CAMPO DE RADIAÇÃO

329. A figura abaixo (Maciel 2002, Mezger 1978) mostra o campo de radiação observado na Galáxia, desde as ondas de rádio até os raios γ . A abscissa é o logaritmo da frequência ν , e a ordenada é o logaritmo do produto νU_ν , onde U_ν é a densidade de energia. Mostre que o produto νU_ν representa a densidade de energia do campo de radiação por intervalo logarítmico de frequência.

**Solução:**

U_ν é a densidade de energia em $\text{erg cm}^{-3} \text{ Hz}^{-1}$, portanto $U_\nu d\nu$ é a densidade de energia em erg cm^{-3} . Seja x a densidade de energia por intervalo logarítmico de frequência. Então devemos ter

$$x d \ln \nu = U_\nu d\nu$$

$$x = U_\nu \frac{d\nu}{d \ln \nu}$$

mas

$$\frac{d \ln \nu}{d\nu} = \frac{1}{\nu}$$

portanto

$x = \nu U_\nu$ é a densidade de energia por intervalo logarítmico de frequência e

$$\int U_\nu d\nu = \int \nu U_\nu d \ln \nu$$

★ ★ ★

330. Mostre que a radiação cósmica de fundo em microondas, remanescente do Big Bang, alcança um máximo dado pelo pico da curva B da figura do exercício anterior. Qual é o comprimento de onda correspondente a este máximo?

Solução:

Na figura o pico está aproximadamente em $\log \nu \simeq 11.2$, alcançando o valor $\log \nu U_\nu \simeq -12.6$.

Admitindo uma emissão de corpo negro, temos pela lei de Wien

$$h \nu_{max} = 2.821 k T$$

obtemos $T \simeq 2.7 \text{ K}$, que é a temperatura da radiação cósmica de fundo.

Podemos estimar a densidade de energia por

$$U_\nu = \frac{8 \pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h \nu / k T) - 1}$$

$$\nu U_\nu = \frac{8 \pi h \nu^4}{c^3} \frac{1}{\exp(h \nu / k T) - 1}$$

com os valores de ν e T

$$\nu U_\nu \simeq 2.48 \times 10^{-13} \text{ erg/cm}^3$$

$\log(\nu U_\nu) \simeq -12.6$, semelhante ao valor do gráfico

★ ★ ★

331. Suponha que a curva C da figura do Exercício 329 represente a emissão por grãos sólidos idênticos, com temperatura T . (a) A partir da curva mostrada na figura, qual seria esta temperatura? (b) Medidas do satélite COBE mostram que o pico da emissão dos grãos é da ordem de $\lambda F_\lambda \simeq 10^{-9} \text{ erg s}^{-2} \text{ s}^{-1}$ para $\lambda \simeq 130 \mu\text{m}$. Qual seria o valor da temperatura média dos grãos neste caso?

Solução:

O pico indicado na figura é

$$\log \nu_{max} \simeq 12.2 \longrightarrow \nu_{max} \simeq 1.58 \times 10^{12} \text{ Hz}$$

usando a lei de Wien

$$h \nu_{max} = 2.82 k T$$

$$T \simeq \frac{h \nu_{max}}{2.82 k} \simeq 27 \text{ K}$$

$$(b) \lambda_{max} \simeq 130 \mu\text{m} = 130 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

pela lei de Wien

$$\lambda_{max} T \simeq 0.29$$

$$T \simeq \frac{0.29}{130 \times 10^{-4}} \simeq 22 \text{ K}$$

★ ★ ★

332. A componente D na figura do Exercício 329 é basicamente a radiação estelar integrada, que pode ser observada no meio interestelar. Considere que a densidade de energia em $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ é $U_{5500} \simeq 1.2 \times 10^{-16} \text{ erg cm}^{-3} \text{ \AA}^{-1}$. Estime o produto νU_ν para esse comprimento de onda e compare seu resultado com o valor indicado na figura.

Solução:

Com o valor dado de U_{5500} temos

$$\nu U_\nu = \lambda U_\lambda \simeq (5500)(1.2 \times 10^{-16}) \simeq 6.60 \times 10^{-13} \text{ erg cm}^{-3}$$

$$\log \nu U_\nu \simeq -12.2$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \simeq \frac{3 \times 10^{10}}{(5500)(10^{-8})} \simeq 5.45 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\log \nu \simeq 14.7$$

da figura, temos para esta frequência $\log \nu U_\nu \simeq -12.2$

ou seja, o acordo é bom.

★ ★ ★

333. No diagrama do campo de radiação interestelar, a curva E do Exercício 329 é identificada como uma radiação de alta energia, na faixa dos raios X. Considere a radiação com frequência $\nu = 10^{19} \text{ Hz}$. Nesta faixa, os raios X são conhecidos como raios X “duros”. Qual é a energia do quantum associado a esta radiação, em ergs e keV?

Solução:

$$E = h \nu \simeq (6.63 \times 10^{-27}) (10^{19})$$

$$E \simeq 6.63 \times 10^{-8} \text{ erg} \simeq 4.14 \times 10^4 \text{ eV} \simeq 41.4 \text{ keV}$$

★ ★ ★

334. Na faixa óptica e ultravioleta do espectro é costume medir as frequências em Hz e os comprimentos de onda em $\text{\AA}$, mas na região de alta energia (raios X e γ) é mais usual relacionar a energia dos quanta em eV (ou seus múltiplos) e os comprimentos de onda em $\text{\AA}$. Obtenha (a) uma expressão para a frequência ν em Hz em função do comprimento de onda λ em $\text{\AA}$, e (b) uma expressão para a energia do quantum E_ν em eV em função do comprimento de onda λ em $\text{\AA}$.

Solução:

$$(a) \nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$\nu(\text{Hz}) = \frac{3 \times 10^{10}}{\lambda(\text{cm})} = \frac{(3 \times 10^{10})(10^8)}{\lambda(\text{\AA})} \simeq \frac{3 \times 10^{18}}{\lambda(\text{\AA})}$$

$$(b) E_\nu = h \nu = \frac{h c}{\lambda}$$

$$E(\text{erg}) = \frac{(6.63 \times 10^{-27})(3 \times 10^{10})}{\lambda(\text{cm})} \simeq \frac{2.0 \times 10^{-16}}{\lambda \text{ cm}}$$

$$E(\text{eV}) = \frac{(6.63 \times 10^{-27})(3 \times 10^{10})(10^8)}{(1.60 \times 10^{-12}) \lambda(\text{\AA})} \simeq \frac{12400}{\lambda(\text{\AA})}$$

★ ★ ★

335. Na faixa rádio do espectro eletromagnético podemos medir as frequências em GHz e os comprimentos de onda em cm. Obtenha uma expressão para a frequência ν em GHz em função do comprimento de onda λ em cm.

Solução:

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$\nu(\text{Hz}) = \frac{3.0 \times 10^{10} (\text{cm/s})}{\lambda (\text{cm})}$$

$$10^9 \nu(\text{GHz}) = \frac{3.0 \times 10^{10} (\text{cm/s})}{\lambda (\text{cm})}$$

$$\nu(\text{GHz}) \simeq \frac{30}{\lambda (\text{cm})}$$

★ ★ ★

336. O fluxo de radiação no meio interestelar pode ser aproximado por uma composição de corpos negros, afetados por um fator de diluição. No modelo proposto por Werner e Salpeter (1969) o fluxo pode ser escrito

$$F_\lambda \simeq \sum_1^4 W_i B_\lambda(T_i)$$

Os valores das temperaturas e fatores de diluição de cada componente estão relacionadas na tabela abaixo.

T_i (K)	14 500	7 500	4 000	2.7
W_i	4×10^{-16}	1.5×10^{-14}	1.5×10^{-13}	1

Use este modelo e (a) Calcule a densidade de energia U_λ no centro da faixa visível do espectro, onde $\lambda = 5500 \text{ \AA}$. (b) Uma solução mais detalhada resulta em uma densidade de energia em $5500 \text{ \AA}$ de $U'_\lambda(5500) \simeq 1.32 \times 10^{-16} \text{ erg cm}^{-3} \text{ A}^{-1}$. Compare seu resultado com este valor.

Solução:

(a) A densidade de energia pode ser escrita

$$U_\lambda = \frac{4\pi}{c} \sum W_i B_\lambda(T_i)$$

para este modelo

$$U_\lambda = \frac{4\pi}{c} \frac{2hc^2}{\lambda^5} \left[\frac{4 \times 10^{-16}}{e^{hc/\lambda k T_1} - 1} + \frac{1.5 \times 10^{-14}}{e^{hc/\lambda k T_2} - 1} + \frac{1.5 \times 10^{-13}}{e^{hc/\lambda k T_3} - 1} + 0 \right]$$

$$U_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} [0.79 \times 10^{-16} + 4.70 \times 10^{-16} + 2.15 \times 10^{-16}]$$

$$U_\lambda = 0.76 \times 10^{-16} \text{ erg cm}^{-3} \text{ A}^{-1}$$

(b) Com o valor dado encontramos

$$U'_\lambda(5500) \simeq 1.7 U_\lambda(5500)$$

★ ★ ★

337. Suponha que o campo de radiação em um ponto qualquer do meio interestelar possa ser caracterizado por um corpo negro com $T = 10^4 \text{ K}$ e um fator de diluição $W = 10^{-14}$. (a) Qual seria o fluxo esperado em $\lambda = 2000 \text{ \AA}$ em unidades de $\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$? (b) Compare seu resultado com o valor previsto para o modelo com quatro componentes do exercício anterior. (c) O fluxo observado pelo satélite TD1-A é $F_{obs} \simeq 7 \times 10^{-7} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$. Qual dos dois modelos melhor se ajusta às observações, o deste exercício ou o modelo com 4 componentes do exercício anterior?

Solução:

$$(a) F_\lambda = W \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k T} - 1}$$

Para $T = 10^4 \text{ K}$, $W = 10^{-14}$ e $\lambda = 2000 \text{ \AA} = 2 \times 10^{-5} \text{ cm}$ temos

$$F_\lambda \simeq 2.8 \times 10^{-7} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$$

(b) Para o modelo com 4 componentes

$$T_1 = 14500 \text{ K}, W_1 = 4 \times 10^{-16}, F_1 \simeq 1.04 \times 10^{-7} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$$

$$T_2 = 7500 \text{ K}, W_2 = 1.5 \times 10^{-14}, F_2 \simeq 0.38 \times 10^{-7} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$$

$$T_3 = 4000 \text{ K}, W_3 = 1.5 \times 10^{-13}, F_3 \simeq 8.38 \times 10^{-11} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$$

$$T_4 = 2.7 \text{ K}, W_4 = 1, F_4 \ll F_3$$

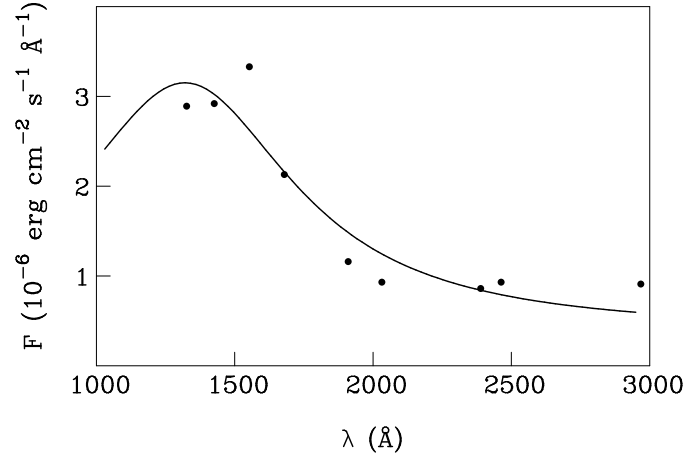
$$\sum F_i \simeq 1.4 \times 10^{-7} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$$

$$\frac{F_\lambda}{\sum F_i} \simeq 2$$

(c) O modelo deste exercício é um pouco melhor.

★ ★ ★

338. Na determinação do campo de radiação ultravioleta interestelar, medidas da Apollo 17 indicam um fluxo $n_\lambda = 1.2 \times 10^5$ fótons $\text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$ para $\lambda = 1500 \text{ \AA}$ (Henry 2002). (a) Calcule o fluxo de radiação interestelar neste comprimento de onda. (b) Compare seu resultado com o valor estimado pelo ajuste dado na figura abaixo (Maciel (2002, p.50)).



Solução:

(a) O fluxo é

$$F_\lambda \simeq h \nu n_\lambda = \frac{h c}{\lambda} n_\lambda$$

$$F_\lambda \simeq \frac{(6.63 \times 10^{-27}) (3 \times 10^{10})}{1500 \times 10^{-8}} (1.2 \times 10^5) \simeq 1.6 \times 10^{-6} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$$

(b) Da figura temos aproximadamente

$$F'_\lambda \simeq 2.7 \times 10^{-6} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$$

$$\frac{F'_\lambda}{F_\lambda} \simeq \frac{2.7 \times 10^{-6}}{1.6 \times 10^{-6}} \simeq 1.7$$

★ ★ ★

EXCITAÇÃO E IONIZAÇÃO

339. Processos colisionais, absorção da radiação, recapturas a partir do contínuo etc. mantêm a população de um certo nível de energia k em 10^8 átomos. O coeficiente de emissão de Einstein relativo a um nível inferior j é $A_{kj} \simeq 10^8 \text{ s}^{-1}$. (a) Qual é o número de emissões espontâneas por segundo para o nível j ? (b) Qual é o tempo de vida radiativo do nível k em relação às emissões para o nível j ?

Solução:

(a) Chamando N o número de emissões espontâneas por segundo

$$N = n_k A_{kj} = (10^8) (10^8) = 10^{16} \text{ s}^{-1}$$

$$(b) t_k \simeq \frac{1}{A_{kj}} = 10^{-8} \text{ s}$$

★ ★ ★

340. Prove as relações abaixo entre os coeficientes de Einstein. Considere que, em ET, as taxas de emissão e absorção de energia devem ser iguais, e use a equação de Boltzmann.

$$g_j B_{jk} = g_k B_{kj} \quad (1)$$

$$A_{kj} = \frac{8 \pi h \nu_{jk}^3}{c^3} B_{kj} \quad (2)$$

$$A_{kj} = \frac{8 \pi h \nu_{jk}^3}{c^3} \frac{g_j}{g_k} B_{jk} \quad (3)$$

Solução:

No equilíbrio termodinâmico (ET), as taxas de emissão e de absorção de energia são iguais, portanto

$$\frac{n_k^*}{n_j^*} \frac{A_{kj}}{4\pi} = \left(B_{jk} - \frac{n_k^*}{n_j^*} B_{kj} \right) \frac{I_{\nu_{jk}}}{c}$$

$$\frac{n_k^*}{n_j^*} \left[\frac{A_{kj}}{4\pi} + \frac{B_{kj} I_{\nu_{jk}}}{c} \right] = B_{jk} \frac{I_{\nu_{jk}}}{c}$$

$$\frac{n_k^*}{n_j^*} = \left[B_{jk} \frac{I_{\nu_{jk}}}{c} \right] \left[\frac{A_{kj}}{4\pi} + \frac{B_{kj} I_{\nu_{jk}}}{c} \right]^{-1} = \frac{g_k}{g_j} e^{-h\nu_{jk}/kT}$$

desta equação podemos escrever

$$\frac{A_{kj}}{4\pi} = \frac{B_{jk} \frac{I_{\nu_{jk}}}{c} (g_j/g_k)}{e^{-h\nu_{jk}/kT}} - \frac{B_{kj} I_{\nu_{jk}}}{c}$$

usando a função de Planck obtemos

$$A_{kj} = \frac{8\pi h \nu_{jk}^3}{c^3} \frac{B_{jk} (g_j/g_k) e^{h\nu_{jk}/kT} - B_{kj}}{e^{h\nu_{jk}/kT} - 1}$$

como os coeficientes de Einstein dependem apenas dos parâmetros atômicos, e não de grandezas macroscópicas como a temperatura, devemos ter

$$B_{jk} \frac{g_j}{g_k} = B_{kj}$$

que é a equação (1). Substituindo na equação anterior obtemos (2), e usando (1) obtemos (3).

★ ★ ★

341. Prove as relações abaixo entre os coeficientes de Einstein e a força de oscilador.

$$B_{jk} = \frac{\pi e^2}{m_e h \nu_{jk}} f_{jk} \quad (1)$$

$$B_{kj} = \frac{\pi e^2}{m_e h \nu_{jk}} \frac{g_j}{g_k} f_{jk} \quad (2)$$

$$A_{kj} = \frac{8 \pi^2 e^2 \nu_{jk}^2}{m_e c^3} \frac{g_j}{g_k} f_{jk} \quad (3)$$

Solução:

Podemos escrever para a seção de choque integrada

$$\sigma = \frac{h \nu_{jk} B_{jk}}{c} = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{jk}$$

obtendo a relação (1). Usando as relações entre os coeficientes de Einstein do exercício anterior obtemos as equações (2) e (3).

★ ★ ★

342. A força de oscilador de uma transição envolvendo os níveis j e k está relacionada com o coeficiente de emissão espontânea de Einstein pela relação

$$f_{jk} = \frac{m_e c^3}{8 \pi^2 e^2} \frac{g_k}{g_j} \frac{A_{kj}}{\nu_{jk}^2}$$

Calcule a força de oscilador f_{jk} para a linha de 21 cm do hidrogênio neutro, para a qual o coeficiente de emissão $A_{kj} \simeq 2,9 \times 10^{-15} \text{ s}^{-1}$. Considere $g_k/g_j = 3$ para a razão dos pesos estatísticos dos dois níveis. Qual seria a força de oscilador da transição inversa, f_{kj} ?

Solução:

$$\nu_{jk} = \frac{c}{\lambda_{jk}} = 1420 \text{ MHz}$$

$$f_{jk} = 5.8 \times 10^{-12}$$

$$f_{kj} = -\frac{g_j}{g_k} f_{jk} = -1.9 \times 10^{-12}$$

★ ★ ★

343. Considerando os processos colisionais de excitação de níveis de energia atômicos, (a) quais são as diferenças entre a probabilidade R_{jk} , a taxa de excitação colisional γ_{jk} , a seção de choque de excitação σ_{jk} e a intensidade ou força de colisão $\Omega(j, k)$? (b) A transição do nível 1D_2 para o nível 3P do [NII] tem um coeficiente de excitação $\gamma_{kj} = 4.6 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ para colisões com elétrons em regiões com $T \simeq 10^4 \text{ K}$ e densidade eletrônica $n_e \simeq 10^3 \text{ cm}^{-3}$. Qual é a taxa média de colisões neste caso?

Solução:

(a) R_{jk} é a probabilidade por unidade de tempo da transição colisional $j \rightarrow k$ (unidades: s^{-1})

γ_{jk} é a taxa de excitação colisional por unidade de tempo por partícula de campo (unidades: $\text{cm}^3 \text{ s}^{-1}$)

σ_{jk} é a seção de choque de excitação, ou área efetiva (unidades: cm^2)

$\Omega(j, k)$ é a intensidade ou força de colisão (adimensional)

(b) $R_{jk} \simeq n_e \gamma_{jk} \simeq (10^3) (4.6 \times 10^{-8}) \simeq 4.6 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$

★ ★ ★

344. Considere as linhas de emissão do [NII] em $\lambda 6548/6583 \text{ \AA}$ em uma nebulosa com $T_e = 10^4 \text{ K}$. (a) Calcule o coeficiente de desexcitação colisional γ_{kj} do nível 1D_2 para os níveis 3P . Os dados relevantes estão na tabela abaixo (Maciel 2002, p. 131) e $g_k = 5$. (b) Qual é a probabilidade total por unidade de tempo de emissões espontâneas do nível 1D_2 para os níveis inferiores? (c) Como se dará a desexcitação do nível 1D_2 em uma região com $n_e \simeq 10^3 \text{ cm}^{-3}$?

nível	λ_{jk} (Å)	E_{jk} (eV)	$\Omega(j, k)$	A_{kj} (s ⁻¹)
$^3P_0 - ^3P_1$	204 μm	0.006	0.40	2.1×10^{-6}
$^3P_0 - ^3P_2$	76 μm	0.016	0.28	1.2×10^{-12}
$^3P_1 - ^3P_2$	122 μm	0.010	1.13	7.5×10^{-6}
$^3P_0 - ^1D_2$	6527.1	1.900	2.68	5.4×10^{-7}
$^3P_1 - ^1D_2$	6548.1	1.894	total	1.0×10^{-3}
$^3P_2 - ^1D_2$	6583.4	1.883	total	3.0×10^{-3}
$^3P_1 - ^1S_0$	3062.8	4.048	0.35	3.4×10^{-2}
$^3P_2 - ^1S_0$	3070.8	4.038	total	1.5×10^{-4}
$^1D_2 - ^1S_0$	5754.6	2.155	0.41	1.1

Solução:

(a) Temos que

$$\gamma_{kj} = \frac{h^2 \Omega(j, k)}{g_k (2\pi m_e)^{3/2} (kT)^{1/2}} \simeq 4.6 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$(b) \sum A_{kj} = 5.4 \times 10^{-7} + 1.0 \times 10^{-3} + 3.0 \times 10^{-3} \simeq 4.0 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

$$(c) n_e \gamma_{kj} = (10^3) (4.6 \times 10^{-8}) \simeq 4.6 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

$$n_e \gamma_{kj} \ll \sum A_{kj}$$

a desexcitação é radiativa.

Para estimar as escalas de tempo

$$t_c \simeq \frac{1}{n_e \gamma_{kj}} \simeq 2 \times 10^4 \text{ s}$$

$$t_r \simeq \frac{1}{\sum A_{kj}} \simeq 250 \text{ s}$$

ou seja, $t_r \ll t_c$

★ ★ ★

345. Em um átomo com apenas dois níveis j e k a desexcitação será radiativa se $A_{kj} \gg n_e \gamma_{kj}$ e colisional se $A_{kj} \ll n_e \gamma_{kj}$. Podemos definir a densidade crítica n_c que separa os dois regimes por

$$n_c = \frac{A_{kj}}{\gamma_{kj}}$$

Esta expressão pode ser facilmente generalizada para átomos com muitos níveis. Determine a densidade crítica para as transições $\lambda 4959/5007 \text{ \AA}$ do [O III] em uma nebulosa com $T_e = 10^4 \text{ K}$. Use os dados da tabela abaixo (Maciel 2002, p. 131).

nível	$\lambda_{jk} (\text{\AA})$	$E_{jk} (\text{eV})$	$\Omega(j, k)$	$A_{kj} (\text{s}^{-1})$
$^3P_0 - ^3P_1$	$88.4 \mu\text{m}$	0.014	0.54	2.6×10^{-5}
$^3P_0 - ^3P_2$	$32.7 \mu\text{m}$	0.038	0.27	3.0×10^{-11}
$^3P_1 - ^3P_2$	$51.8 \mu\text{m}$	0.024	1.29	9.8×10^{-5}
$^3P_0 - ^1D_2$	4931.0	2.515	2.17	2.7×10^{-6}
$^3P_1 - ^1D_2$	4958.9	2.500	total	6.7×10^{-3}
$^3P_2 - ^1D_2$	5006.9	2.476	total	2.0×10^{-2}
$^3P_1 - ^1S_0$	2321.0	5.342	0.28	2.2×10^{-1}
$^3P_2 - ^1S_0$	2331.4	5.318	total	7.8×10^{-4}
$^1D_2 - ^1S_0$	4363.2	2.842	0.62	1.8

Solução:

Usando a relação para γ_{kj} do exercício anterior temos

$$\gamma_{kj} \simeq 3.7 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

portanto

$$n_e = \frac{2.7 \times 10^{-6} + 6.7 \times 10^{-3} + 2.0 \times 10^{-2}}{3.7 \times 10^{-8}} \simeq 7.2 \times 10^5 \text{ cm}^{-3}$$

usando apenas a linha 4959

$$n_e \simeq \frac{6.7 \times 10^{-3}}{3.7 \times 10^{-8}} \simeq 1.8 \times 10^5 \text{ cm}^{-3}$$

usando apenas a linha 5007

$$n_e \simeq \frac{2.0 \times 10^{-2}}{3.7 \times 10^{-8}} \simeq 5.4 \times 10^5 \text{ cm}^{-3}$$

somando as duas linhas: $n_e \simeq 7.2 \times 10^5 \text{ cm}^{-3}$

★ ★ ★

346. O coeficiente de desexcitação dos níveis hiperfinos do hidrogênio para colisões com outros átomos de H pode ser aproximado pela expressão

$$\gamma_{kj} \simeq 0.005 T + 0.400$$

no intervalo aproximado $30 \leq T(\text{K}) \leq 300$, característico das nuvens interestelares difusas, onde T está em K e γ_{kj} é dado em unidades de $10^{-10} \text{ cm}^3/\text{s}$. Qual é o erro cometido pelo uso desta expressão para uma nuvem interestelar com $T = 100 \text{ K}$?

Solução:

Usando a relação dada

$$\gamma'_{kj}(100 \text{ K}) \simeq [(0.005)(100) + 0.400] \times 10^{-10} \simeq 9.0 \times 10^{-11} \text{ cm}^3/\text{s}$$

com o valor $\gamma_{kj}(100 \text{ K}) = 9.5 \times 10^{-11} \text{ cm}^3/\text{s}$ (Maciel 2002, p. 134)

temos

$$\epsilon(\%) = \frac{|\gamma_{kj} - \gamma'_{kj}|}{\gamma_{kj}} 100 = 5.3\%$$

★ ★ ★

347. Considere um modelo com 3 níveis para o íon S^+ tal que: nível 3 $\rightarrow$ $^2D_{5/2}$; nível 2 $\rightarrow$ $^2D_{3/2}$; nível 1 $\rightarrow$ $^4S_{3/2}$. As transições correspondem às linhas $\lambda(2, 1) = 6730.8 \text{ \AA}$ e $\lambda(3, 1) = 6716.4 \text{ \AA}$. (a) Quais são as energias E_{21} e E_{31} correspondentes às linhas 6730.8 e 6716.4 $\text{\AA}$? (b) Estime os coeficientes de desexcitação colisional γ_{21} e γ_{31} para os níveis $^2D_{3/2}$ e $^2D_{5/2}$, respectivamente. Adote $g_2 = 4$, $g_3 = 6$, $\Omega(2, 1) + \Omega(3, 1) \simeq 7.0$ (c) Considere que a probabilidade de emissão espontânea do nível 2D seja dada por $A_{31} \simeq 2.6 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Como será a desexcitação na nebulosa planetária NGC 3132, adotando $T_e \simeq 10^4 \text{ K}$ e $n_e \simeq 620 \text{ cm}^{-3}$?

Solução:

$$(a) E_{21} = \frac{hc}{\lambda_{21}} = \frac{hc}{6730.8} \simeq 2.96 \times 10^{-12} \text{ erg} \simeq 1.85 \text{ eV}$$

$$E_{31} = \frac{hc}{\lambda_{31}} = \frac{hc}{6716.4} \simeq 2.96 \times 10^{-12} \text{ erg} \simeq 1.85 \text{ eV}$$

$$(b) \gamma_{21} = \frac{h^2 \Omega(2, 1)}{g_2 (2\pi m_e)^{3/2} (kT)^{1/2}}$$

$$\gamma_{21} \simeq 8.63 \times 10^{-8} \frac{\Omega(2, 1)}{4}$$

$$\gamma_{31} \simeq 8.63 \times 10^{-8} \frac{\Omega(3, 1)}{6}$$

$$\text{com } \Omega(2, 1) \simeq 7.0 \rightarrow \gamma_{21} \leq 1.5 \times 10^{-7} \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$\text{com } \Omega(3, 1) \simeq 7.0 \rightarrow \gamma_{31} \leq 1.0 \times 10^{-7} \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$\gamma_{total} \simeq (1.0 - 1.5) \times 10^{-7} \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$(c) n_e \gamma \simeq (620)(1.0 \text{ a } 1.5) \times 10^{-7} \simeq 6.2 \times 10^{-5} \text{ a } 9.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

com $A_{31} \simeq 2.6 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $A_{31} \gg n_e \gamma$ e a desexcitação é radiativa

★ ★ ★

348. A linha de 21 cm do H é produzida por uma transição radiativa entre dois níveis hiperfinos do estado fundamental, os quais correspondem às duas orientações possíveis do spin do elétron e do núcleo. Os dois níveis têm uma diferença de energia $h\nu_{12} = 5.9 \times 10^{-6}$ eV. (a) Qual é a frequência da radiação emitida? (b) A probabilidade de transição espontânea do nível 2 para o nível 1, medida pelo coeficiente de Einstein é $A_{21} = 2.9 \times 10^{-15} \text{ s}^{-1}$. Qual é a escala de tempo necessária para o decaimento ao nível inferior? (c) O tempo obtido é muito longo, havendo uma grande probabilidade de colisões com outras partículas, de modo que as populações dos níveis de energia são características de ET. Qual seria a razão entre as populações dos níveis 2 e 1, n_2/n_1 em uma nuvem interestelar com $T = 100 \text{ K}$?

Solução:

(a) A frequência é dada por

$$\nu_{12} = \frac{\Delta E}{h} = \frac{(5.9 \times 10^{-6}) (1.6 \times 10^{-12})}{6.63 \times 10^{-27}} \simeq 1.42 \times 10^9 \text{ Hz} = 1420 \text{ MHz}$$

$$(b) t_{21} \simeq \frac{1}{A_{21}} \simeq \frac{1}{2.9 \times 10^{-15}} \simeq 3.4 \times 10^{14} \text{ s} \simeq 10^7 \text{ ano}$$

(c) neste caso, podemos usar a equação de Boltzmann

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-h\nu_{12}/kT}$$

com $g_2 = 3$ e $g_1 = 1$. Considerando $T = 100 \text{ K}$

$$\frac{h\nu_{12}}{kT} \simeq \frac{0.068}{T} \simeq 6.8 \times 10^{-4} \ll 1$$

podemos desprezar o termo exponencial na equação acima, de modo que

$$\frac{n_2}{n_1} \simeq \frac{g_2}{g_1} = \frac{3}{1} = 3$$

ou seja, 3/4 dos átomos de H estão no nível superior, e 1/4 no nível inferior

★ ★ ★

349. Compare as escalas de tempo de vida de algumas linhas de emissão intensas observadas nos espectros de nebulosas fotoionizadas: (a) As linhas permitidas do hidrogênio Lyman- α ($\lambda = 1216 \text{ \AA}$), H α ($\lambda = 6563 \text{ \AA}$) e H β ($\lambda = 4861 \text{ \AA}$), para as quais as as probabilidades são $A = 4.7 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$, $4.4 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ e $8.4 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$. (b) As linhas proibidas do [OIII] em $\lambda = 4959$ e $5007 \text{ \AA}$, com probabilidades médias $A = 6.7 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ e $2.0 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$.

Solução:

(a) Tomando $t_{jk} \sim 1/A_{jk}$, obtemos para as linhas permitidas

$$\text{Lyman-}\alpha, \lambda 1216 \text{ \AA} \longrightarrow t \simeq 2.1 \times 10^{-9} \text{ s}$$

$$H\alpha, \lambda 6563 \text{ \AA} \longrightarrow t \simeq 2.3 \times 10^{-8} \text{ s}$$

$$H\beta, \lambda 4861 \text{ \AA} \longrightarrow t \simeq 1.2 \times 10^{-7} \text{ s}$$

(b) Para as linhas proibidas

$$\lambda 4959 \text{ \AA} \longrightarrow t \simeq 150 \times 10^2 \text{ s}$$

$$\lambda 5007 \text{ \AA} \longrightarrow t \simeq 50 \text{ s}$$

portanto, $t(\text{permitidas}) \ll t(\text{proibidas})$

★ ★ ★

350. Os espectros da radiação integrada do disco galáctico na região óptica e ultravioleta mostram uma queda abrupta do fluxo observado para $\lambda \lesssim 1000 \text{ \AA}$ (ver figura do Exercício 329). Por que isto ocorre?

Solução:

Em $\lambda = 912 \text{ \AA}$ (limite de Lyman) existe um corte no número de fótons pela absorção do H. Por exemplo, considerando $N_H \simeq 10^{20} \text{ cm}^{-2}$ e $\sigma_H \simeq 6 \times 10^{-18} \text{ cm}^2$, a profundidade óptica é

$$\tau_H \simeq N_H \sigma_H \simeq 6 \times 10^2 \gg 1.$$

★ ★ ★

351. Sabendo que a energia do primeiro nível excitado do átomo de H é de 10.2 eV, qual será o comprimento de onda da transição ressonante correspondente a este nível?

Solução:

$$\Delta E = h \Delta \nu = \frac{h c}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{h c}{\Delta E} = \frac{(6.626 \times 10^{-27}) (2.998 \times 10^{10})}{(10.2) (1.602 \times 10^{-12})} = 1.216 \times 10^{-5} \text{ cm} = 1216 \text{ \AA}$$

★ ★ ★

352. A seção de choque de fotoionização a partir do nível n para átomos hidrogenóides é dada por

$$\sigma_{\nu f} = \frac{16}{3\sqrt{3}} \frac{e^2}{m_e c} \frac{R^2 Z^4}{n^5 \nu^3} g_{nf}$$

onde R é a constante de Rydberg, Z é a carga nuclear, ν é a frequência, e g_{nf} é o fator de Gaunt para transições ligado-livre. (a) Mostre que a seção de choque pode ser colocada na forma, em unidades cgs

$$\log \sigma_{\nu f} = 29.45 - 3 \log \nu - 5 \log n + 4 \log Z + \log g_{nf}$$

(b) Calcule a seção de choque máxima para transições ligado-livre no contínuo de Balmer do H. A que comprimento de onda corresponde esta transição? Qual é o erro cometido nesta aproximação, considerando $g_{nf} \simeq 1$?

Solução:

(a) Da primeira relação

$$\log \sigma_{\nu f} = \log \left[\frac{16 e^2 R^2}{3 \sqrt{3} m_e c} \right] - 3 \log \nu - 5 \log n + 4 \log Z + \log g_{nf}$$

$$\log \sigma_{\nu f} = \log \left[\frac{16 (4.8 \times 10^{-10}) (3.29 \times 10^{15})^2}{3 \sqrt{3} (9.11 \times 10^{-28}) (3 \times 10^{10})} \right] - 3 \log \nu - 5 \log n + 4 \log Z + \log g_{nf}$$

$$\log \sigma_{\nu f} = 29.45 - 3 \log \nu - 5 \log n + 4 \log Z + \log g_{nf}$$

$$(b) \nu \geq \nu_0 = \frac{R Z^2}{4} = 8.22 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\lambda \leq \lambda_0 \simeq 3650 \text{ \AA}$$

$$\sigma_{\nu f}(\max) = \sigma_{\nu_0 f}$$

$$\log \sigma_{\nu_0 f} = 29.45 - 3 \log(8.22 \times 10^{14}) - 5 \log 2 + 0 + 0 \simeq -16.8$$

$$\sigma_{\nu_0 f} \simeq 1.6 \times 10^{-17} \text{ cm}^2$$

com $g \simeq 0.9$ o erro é de 10%.

usando o valor mais correto $\sigma \simeq 1.4 \times 10^{-17} \text{ cm}^2$ (Cowley 2000),

com $g \simeq 0.9$ o erro é de 12%.

★ ★ ★

353. Qual é o valor da seção eficaz máxima para fotoionização do H a partir de seu estado fundamental?

Solução:

Usando a relação do exercício anterior

$$\sigma_{\nu f} = \frac{16}{3 \sqrt{3}} \frac{e^2}{m_e c} \frac{R^2 Z^4}{n^5 \nu^3} g_{nf}$$

considerando

$$\nu = \nu_1 = R Z^2 \simeq 3.29 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

$$Z = 1, \quad n = 1$$

obtemos

$$\sigma_{1f} = \frac{16}{3 \sqrt{3}} \frac{e^2}{m_e c} \frac{1}{\nu_1} g_{1f}$$

$$\sigma_{1f} \simeq 7.89 \times 10^{-18} g_{1f} \text{ cm}^2$$

com $g_{1f} \simeq 0.8$ temos

$$\sigma_{1f} \simeq 6.31 \times 10^{-18} \text{ cm}^2$$

★ ★ ★

354. Mostre que a taxa de fotoionização do hidrogênio pode ser escrita

$$\beta = \int_{\nu_1}^{\infty} \frac{4 \pi \sigma_{\nu} J_{\nu}}{h \nu} d\nu$$

onde $\nu_1 = 3.29 \times 10^{15} \text{ Hz}$, σ_{ν} é a seção de choque de fotoionização e J_{ν} é a intensidade média do campo de radiação.

Solução:

A densidade de energia é

$$U_{\nu} = \frac{1}{c} \int I_{\nu} d\omega$$

a intensidade média é

$$J_{\nu} = \int \frac{I_{\nu} d\omega}{4 \pi} = \frac{c U_{\nu}}{4 \pi}$$

a taxa de fotionização é portanto

$$\beta = \int_{\nu_1}^{\infty} \frac{c U_{\nu} \sigma_{\nu}}{h \nu} d\nu = \int_{\nu_1}^{\infty} \frac{4 \pi \sigma_{\nu} J_{\nu}}{h \nu} d\nu$$

★ ★ ★

355. Estime a fração de íons de Ca I, Ca II e Ca III em uma nuvem interestelar com $T = 100 \text{ K}$ e $n_e = 10^{-4} \text{ cm}^{-3}$, considerando apenas fotoionização e recombinação radiativa. Dados: taxas de fotoionização $\beta(\text{CaI}) = 3.8 \times 10^{-10} \text{ s}^{-1}$, $\beta(\text{CaII}) = 4.0 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}$, coeficientes de recombinação $\alpha_R(\text{CaI}) = 5.1 \times 10^{-12} \text{ cm}^3/\text{s}$, $\alpha_R(\text{CaII}) = 2.6 \times 10^{-11} \text{ cm}^3/\text{s}$.

Solução:

As equações relevantes são

$$R_{II,I} = \frac{n(\text{XII})}{n(\text{XI})} = \frac{\gamma(\text{XI})}{n_e \alpha(\text{XI})}$$

$$R_{III,II} = \frac{n(\text{XIII})}{n(\text{XII})} = \frac{\gamma(\text{XII})}{n_e \alpha(\text{XII})}$$

$$R_{III,I} = \frac{n(\text{XIII})}{n(\text{XI})} = R_{III,II} R_{II,I}$$

$$x_I = \frac{1}{1 + R_{II,I} + R_{III,I}}$$

$$x_{II} = \frac{1}{1 + 1/R_{II,I} + R_{III,I}/R_{II,I}}$$

$$x_{III} = \frac{1}{1 + 1/R_{III,I} + 1/R_{III,II}}$$

os resultados são

$$R_{II,I} \simeq 7.45 \times 10^5$$

$$R_{III,II} \simeq 1.54 \times 10^3$$

$$R_{III,I} \simeq 1.15 \times 10^9$$

$$x(\text{CaI}) \simeq 8.6 \times 10^{-10}$$

$$x(\text{CaII}) \simeq 6.4 \times 10^{-4}$$

$$x(\text{CaIII}) \simeq 1.0$$

★ ★ ★

356. Considere um átomo X que pode ocupar os estágios de ionização X^r e X^{r+1} , com densidades $n(X^r)$ e $n(X^{r+1})$, respectivamente. Chamando $\beta(X^r)$ a taxa de ionização e $\alpha(X^r)$ o coeficiente de recombinação total, escreva a equação de equilíbrio de ionização deste átomo. Qual é o significado físico desta equação?

Solução:

$$n(X^r) \beta(X^r) = n(X^{r+1}) n_e \alpha(X^r)$$

O número de ionizações por cm^3 por segundo igual ao número de recombinações por cm^3 por s.

★ ★ ★

357. Os átomos de H em uma nuvem interestelar com $T = 100 \text{ K}$ são ionizados por partículas de alta energia (raios cósmicos e raios X) segundo uma taxa $\zeta_H = 10^{-16} \text{ s}^{-1}$. Admita que a densidade de átomos de H está no intervalo $0.01 \leq n_H(\text{cm}^{-3}) \leq 1$ e que a densidade de prótons é $n_p \simeq 3.75 \times 10^{-3} n_H^{1/2}$. (a) Calcule a densidade eletrônica n_e e (b) o grau de ionização do H.

Solução:

(a) O coeficiente de recombinação radiativa até o nível n pode ser escrito

$$\alpha^{(n)} = 2.1 \times 10^{-11} Z^2 T^{-1/2} \phi_n(\beta) \text{ cm}^3/\text{s}$$

onde $\beta = h \nu_1 / kT = 158000 Z^2 / T$, $\phi_n(\beta)$ é uma função tabelada na literatura, no caso $\phi_2 \simeq 3.4$. Temos

$$\alpha \simeq 2.11 \times 10^{-11} \frac{\phi_2}{\sqrt{T}} \simeq 7.1 \times 10^{-12} \text{ cm}^3/\text{s}$$

A equação de equilíbrio de ionização para os elementos pesados, quando a fotoionização é contrabalançada pela recombinação radiativa ou dieletrônica, pode ser escrita

$$n_H \zeta_H \simeq n_p n_e \alpha$$

ou seja

$$\frac{n_p n_e}{n_H} \simeq \frac{\zeta_H}{\alpha}$$

e a densidade eletrônica é

$$n_e \simeq \frac{\zeta_H n_H}{\alpha n_p}$$

(b) O grau de ionização é dado por

$$x \simeq \frac{n_p}{n_H}$$

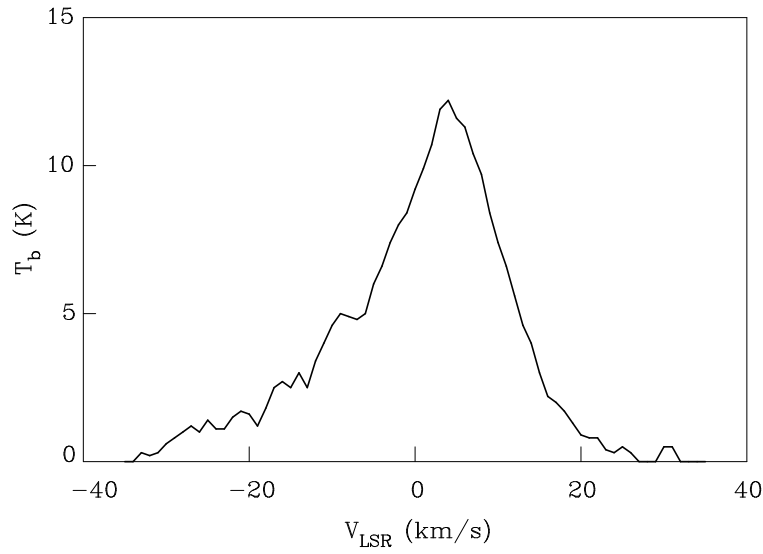
os resultados estão na tabela abaixo.

$n_H \text{ (cm}^{-3}\text{)}$	n_p	n_e	x
0.01	3.75×10^{-4}	3.76×10^{-4}	$0.0375 \rightarrow 3.75\%$
0.1	1.19×10^{-3}	1.18×10^{-3}	$0.019 \rightarrow 1.9\%$
1.0	3.75×10^{-3}	3.76×10^{-3}	$0.00375 \rightarrow 0.37\%$

★ ★ ★

ALARGAMENTO - LARGURA EQUIVALENTE

358. A figura a seguir mostra a variação da temperatura de brilho T_b com a velocidade relativa ao *Local Standard of Rest*, ou Padrão Local de Repouso (LSR) na direção da nebulosa planetária NGC 2371, obtida a partir da linha de 21 cm do H em emissão. Faça um ajuste de gaussianas para este perfil, (a) admitindo uma única nuvem interestelar na direção considerada e (b) admitindo que existem quatro nuvens interestelares nesta direção. Quais seriam as densidades de coluna de cada uma dessas nuvens?

**Solução:**

(a) Ajustando uma gaussiana única temos

$$T_b = \frac{A}{w \sqrt{\pi/2}} e^{-\frac{2(v-v_c)^2}{w^2}}$$

obtendo

$$A = 231.83, \quad w = 17.41 \quad v_c = 2.73$$

neste caso a densidade de coluna do H é

$$N_H \simeq 1.8 \times 10^8 \int T_b dv \simeq 4.17 \times 10^{20} \text{ cm}^{-2}$$

(b) Com 4 gaussianas obtemos os resultados abaixo

	A	w	v_c	$N_H \text{ (cm}^{-2}\text{)}$
1	194.54	13.49	4.08	3.50×10^{20}
2	26.27	6.98	-9.88	4.73×10^{19}
3	3.91	2.59	-16.19	7.03×10^{18}
4	20.20	11.30	-22.21	3.33×10^{19}
				total: 4.38×10^{20}

★ ★ ★

359. Mostre que o perfil Doppler é normalizado e que a largura máxima à meia altura (FWHM ou $\Delta\nu_h$) é

$$\Delta\nu_h = 2 \Delta\nu_D \sqrt{\ln 2} = \frac{2 b \nu_{jk} \sqrt{\ln 2}}{c} = \frac{2 b \sqrt{\ln 2}}{\lambda_{jk}}$$

Solução:

O perfil Doppler pode ser escrito

$$\phi(\Delta\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} e^{-(\Delta\nu/\Delta\nu_D)^2}$$

onde $\Delta\nu_D$ é a largura Doppler. Podemos escrever

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\Delta\nu/\Delta\nu_D)^2} d(\Delta\nu)}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

onde definimos

$$x = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}$$

Portanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \longrightarrow I = 1$$

A FWHM pode ser calculada usando

$$\phi(\Delta\nu_h/2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} e^{-(\Delta\nu_h/2\Delta\nu_D)^2}$$

e a relação

$$e^{(\Delta\nu_h/2\Delta\nu_D)^2} = 2$$

e o resultado é

$$\Delta\nu_h = 2 \Delta\nu_D \sqrt{\ln 2} = \frac{2 b \nu_{jk} \sqrt{\ln 2}}{c} = \frac{2 b \sqrt{\ln 2}}{\lambda_{jk}}$$

★ ★ ★

360. Mostre que o perfil Lorentz é normalizado e que a FWHM (largura total à meia altura) neste caso é $\Delta\nu_h = \Gamma_k/2\pi$.

Solução:

O perfil de Lorentz é

$$\phi(\Delta\nu) = \frac{\Gamma_k/4\pi^2}{(\nu - \nu_{jk})^2 + (\Gamma_k/4\pi)^2}$$

integrando

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_k/4\pi^2}{(\Delta\nu)^2 + (\Gamma_k/4\pi)^2} d(\Delta\nu)$$

com uma mudança de variáveis

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a dx}{x^2 + a^2}$$

onde

$$a = \frac{\Gamma_k}{4\pi}$$

temos

$$\int \frac{a dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$I = \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = 1$$

para obter a FWHM usamos

$$\phi(max) = \phi(0) = \frac{\Gamma_k/4\pi^2}{(\Gamma_k/4\pi)^2} = \frac{4}{\Gamma_k}$$

$$\phi(\Delta\nu_h/2) = \frac{4}{2\Gamma_k} = \frac{2}{\Gamma_k}$$

portanto

$$\frac{2}{\Gamma_k} = \frac{\Gamma_k/4\pi^2}{(\Delta\nu_h^2/4) + (\Gamma_k/4\pi)^2}$$

$$\frac{\Delta\nu_h^2}{2} + \frac{2\Gamma_k^2}{16\pi^2} = \frac{\Gamma_k^2}{4\pi^2}$$

$$\frac{\Delta\nu_h^2}{2} = \frac{\Gamma_k^2}{4\pi^2} - \frac{\Gamma_k^2}{8\pi^2} = \frac{\Gamma_k^2}{8\pi^2}$$

$$\Delta\nu_h^2 = \frac{\Gamma_k^2}{4\pi^2} \longrightarrow \Delta\nu_h = \frac{\Gamma_k}{2\pi}$$

★ ★ ★

361. Uma linha espectral de comprimento de onda central λ é formada em uma região caracterizada por uma temperatura cinética T e uma velocidade de micro-turbulência v_t . (a) Admitindo que o processo de alargamento da linha seja Doppler, como poderia ser escrita a largura Doppler desta linha? (b) Considerando a linha do Si III com $\lambda = 1206 \text{ \AA}$ em uma nuvem com $T = 80 \text{ K}$, que valor deve ter a velocidade de turbulência para que a largura Doppler aumente por um fator dois?

Solução:

(a) A largura Doppler é

$$\Delta\nu_D = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2}$$

incluindo a turbulência podemos escrever

$$(\Delta\nu_D)' = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{2kT}{m} + v_t^2 \right)^{1/2}$$

(b) Com $\lambda = 1206 \text{ \AA} = 1.206 \times 10^{-5} \text{ cm}$, $T = 80 \text{ K}$ $m = 28 m_H$

$$(\Delta\nu_D)' = 2 \Delta\nu_D$$

$$\frac{1}{\lambda} \left(\frac{2kT}{m} + v_t^2 \right)^{1/2} = \frac{2}{\lambda} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2}$$

$$\frac{2kT}{m} + v_t^2 = \frac{8kT}{m}$$

$$v_t^2 = \frac{6kT}{m} \longrightarrow v_t = \sqrt{\frac{6kT}{m}}$$

obtemos os resultados

$$v_t = 3.8 \times 10^4 \text{ cm/s} = 0.38 \text{ km/s}$$

$$\Delta\nu_D = 1.8 \times 10^9 \text{ Hz}$$

$$(\Delta\nu_D)' = 3.6 \times 10^9 \text{ Hz}$$

★ ★ ★

362. Admita um perfil Doppler para a linha K do Ca II interestelar, para a qual $\lambda_{jk} = 3933.66 \text{ \AA}$ ou $\nu_{jk} = 7.63 \times 10^{14} \text{ Hz}$. Adote $T \simeq 100 \text{ K}$ para a temperatura da nuvem e obtenha (a) a largura Doppler $\Delta\nu_D$, (b) a largura total à meia altura (FWHM) e (c) a largura de uma região caracterizada por uma largura Doppler em termos do comprimento de onda, $\Delta\lambda_D$.

Solução:

(a) Para o Ca temos $m_{Ca} \simeq 40 m_H = 6.68 \times 10^{-23} \text{ g}$.

o parâmetro b pode ser obtido por

$$b = \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \simeq 2.0 \times 10^4 \text{ cm/s}$$

a largura Doppler é

$$\Delta\nu_D = b \frac{\nu_{jk}}{c} = \frac{b}{\lambda_{jk}} \simeq 5.1 \times 10^8 \text{ Hz}$$

(b) A FWHM é

$$\Delta\nu_h = 2 \Delta\nu_D \sqrt{\ln 2} \simeq 8.5 \times 10^8 \text{ Hz}$$

$$(c) \Delta\lambda_D \simeq \frac{\lambda_{jk} \Delta\nu_D}{\nu_{jk}} \simeq 0.003 \text{ \AA}$$

★ ★ ★

363. A linha espectral $H\beta$ está centrada em $\lambda_0 = 4861 \text{ \AA}$. (a) Supondo que esta linha sofre alargamento Doppler, calcule sua FWHM $\Delta\nu_h$ em $\text{\AA}$ em uma nuvem de gás com $T = 10^4 \text{ K}$. (b) Qual seria a largura natural da linha?

Solução:

com $m = m_H$ e $T = 10^4$ K temos

$$b = \sqrt{\frac{2 k T}{m}} = 1.29 \times 10^6 \text{ cm/s}$$

$$FWHM = \Delta\nu_h = \frac{2 b \nu_0 \sqrt{\ln 2}}{c} = \frac{2 b \sqrt{\ln 2}}{\lambda_0} = 4.42 \times 10^{10} \text{ Hz}$$

$$\Delta\lambda_h = \frac{\lambda_0^2}{c} \Delta\nu_h = 3.48 \times 10^{-9} \text{ cm} = 0.348 \text{ \AA}$$

$$(b) \Delta\lambda_N = \frac{\lambda_0^2}{c} \Delta\nu_N = \frac{\lambda_0^2}{c} \frac{\Gamma}{2\pi} \simeq \frac{\lambda_0^2}{c} \frac{\gamma}{2\pi}$$

usando a relação clássica

$$\gamma = \frac{2 e^2 (2\pi\nu)^2}{3 m_e c^3}$$

$$\Delta\lambda_N = \frac{\lambda_0^2}{2\pi c} \frac{2 e^2 (2\pi\nu_0)^2}{3 m_e c^3} = \frac{4\pi e^2}{3 m_e c^2}$$

$$\Delta\lambda_N \simeq 1.18 \times 10^{-12} \text{ cm} \simeq 1.18 \times 10^{-4} \text{ \AA}$$

★ ★ ★

364. A linha Lyman- α do H envolve uma transição entre dois níveis j e k , cujos parâmetros são: $\lambda_{jk} = 1215.67 \text{ \AA}$, $g_j = 2$, $g_k = 6$ e $A_{kj} = 6.265 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$. (a) Calcule a força de oscilador f_{jk} para esta linha. (b) Calcule a constante de dissipação Γ_k . (c) Calcule a largura Doppler $\Delta\nu_D$, admitindo uma temperatura cinética $T = 80 \text{ K}$ para a nuvem de H. (d) Considere uma região nas asas radiativas da linha, onde $\Delta\nu \simeq 10 \Delta\nu_D$. Mostre que, neste caso, $(\Delta\nu)^2 \gg (\Gamma_k/4\pi)^2$. (e) Estime a profundidade óptica nas asas da linha, se a densidade de coluna do H for $N_H = 3 \times 10^{20} \text{ cm}^{-2}$. Que fração da intensidade original é absorvida nesta região? Admita que todo o H está no estado fundamental. (f) Calcule a profundidade óptica no centro da linha. (g) Calcule a FWHM. (h) Em que região a linha torna-se suficientemente fraca para que $\tau \simeq 1$?

Solução:

(a) A força de oscilador é

$$f_{jk} = \frac{m_e c}{8\pi^2 e^2} \frac{g_k}{g_j} A_{kj} \lambda_{jk}^2 \simeq 0.417$$

o valor dado por Morton e Smith (1973) é $f_{jk} = 0.4162$

$$(b) \Gamma_k = \sum_{j < k} A_{kj} = 6.265 \times 10^8 \text{ s}^{-1} \simeq 0.6 \text{ GHz}$$

$$(c) \Delta\nu_D = \sqrt{\frac{2 k T}{m_H}} \frac{1}{\lambda_{jk}} = 9.46 \times 10^9 \text{ s}^{-1} \simeq 9.5 \text{ GHz}$$

$$(d) \Delta\nu \simeq 9.46 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$$

$$(\Delta\nu)^2 \simeq 8.95 \times 10^{21} \text{ s}^{-2}$$

$$(\Gamma_k/4\pi)^2 = 2.49 \times 10^{15} \text{ s}^{-2}$$

$$(\Delta\nu)^2 \gg (\Gamma_k/4\pi)^2$$

(e) A profundidade óptica nas asas da linha pode ser estimada por

$$\tau_\nu \simeq \frac{e^2 \lambda^4 f_{jk} N_j \Gamma_k}{4 \pi m_e c^3 (\Delta\lambda)^2} = \frac{e^2 f_{jk} N_j \Gamma_k}{4 \pi m_e c (\Delta\nu)^2} \simeq 5.87 \times 10^3$$

$$\frac{I_\nu}{I_{\nu_0}} \simeq e^{-\tau_\nu} \simeq 0$$

$$(f) \tau_c \simeq N_j \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{jk} \phi(0) = N_j \frac{\pi e^2 f_{jk}}{m_e c} \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} \simeq 1.97 \times 10^8$$

$$(g) a = \frac{\Gamma_k}{4 \pi \Delta\nu_D} = 0.005 \ll 1$$

$$F(a, u) = 0 \quad \text{para } u \simeq 3$$

$$FWHM \simeq 2 \sqrt{\ln 2} \Delta\nu_D \simeq 1.58 \times 10^{10} \text{ s}^{-1} \simeq 16 \text{ GHz}$$

$$(h) (\Delta\nu)^2 = \frac{e^2 f_{jk} N_j \Gamma_k}{4 \pi m_e c}$$

$$\nu_{jk} = 2.47 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

$$\Delta\nu = 7.24 \times 10^{12} \text{ Hz} \simeq 765 \Delta\nu_D \simeq 458 FWHM \simeq 10^{13} \text{ Hz} \simeq 10^4 \text{ GHz}$$

★ ★ ★

365. Considere uma linha espectral em que a intensidade no contínuo é I_c , a intensidade na linha é I_λ e a largura equivalente é W_λ . Por que a integral

$$\int \left(1 - \frac{I_\lambda}{I_c}\right) d\lambda$$

tem o nome de largura equivalente?

Solução:

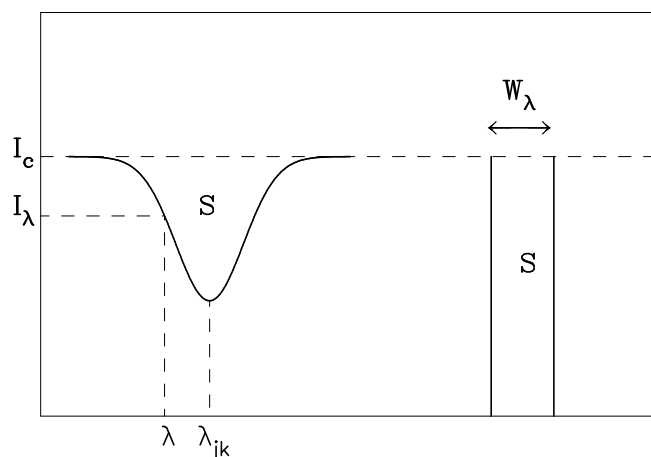
A largura equivalente W_λ de uma linha espectral pode ser definida por

$$W_\lambda = \int \frac{I_c - I_\lambda}{I_c} d\lambda = \int \left(1 - \frac{I_\lambda}{I_c}\right) d\lambda$$

onde a integral é feita ao longo da linha. A área S é dada por

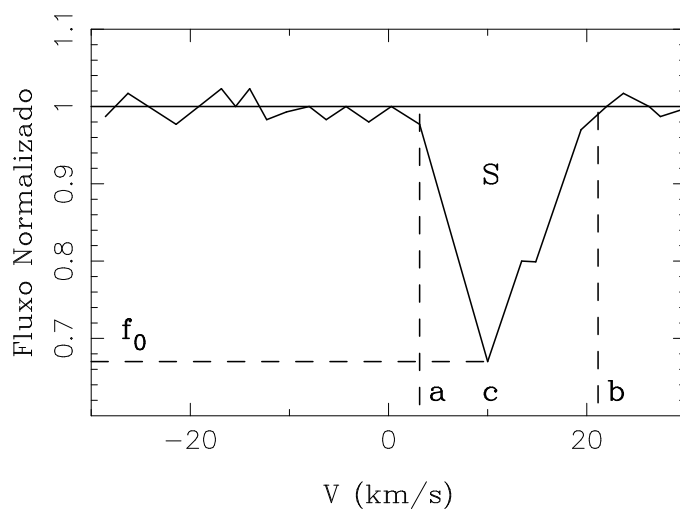
$$S = \int (I_c - I_\lambda) d\lambda = I_c W_\lambda$$

W_λ é à largura de uma linha de absorção total com a mesma energia



* * *

366. A figura abaixo mostra a linha do Cr II $\lambda 2062 \text{ \AA}$ em absorção de origem interestelar na direção da estrela ξ Persei (Cardelli et al. 1991). A ordenada mostra o fluxo normalizado, e a abscissa é a velocidade heliocêntrica. (a) Estime a largura equivalente da linha, expressando seu resultado em km/s e em mÅ. (b) O valor da largura equivalente, determinado por Cardelli et al., é $W_\lambda = 20.92 \text{ mÅ}$. Compare seu resultado com este valor e estime o erro cometido.



Solução:

(a) Pela figura, podemos estimar os valores dos parâmetros a , b , c e f_0

$$a \simeq 3.14 \text{ km/s}$$

$$b \simeq 21.14 \text{ km/s}$$

$$c \simeq 10.0 \text{ km/s}$$

$$f_0 \simeq 0.67$$

a área S é

$$S \simeq (b - a) \times 1.0 - \left[\frac{1 + f_0}{2} (c - a) + \frac{1 + f_0}{2} (b - c) \right] \simeq (b - a) \frac{1 - f_0}{2}$$

da definição da largura equivalente W_ν

$$W_\nu \simeq \frac{S}{1.0} \simeq (b - a) \frac{1 - f_0}{2} \simeq 2.97 \text{ km/s}$$

em termos de W_λ

$$W_\lambda \simeq \lambda \frac{W_\nu}{c} \simeq 20.41 \text{ mÅ}$$

(b) O erro cometido é

$$\epsilon = \frac{20.41 - 20.92}{20.92} \times 100 = -2.4\%$$

★ ★ ★

367. A linha Lyman- α ($\lambda_0 = 1216 \text{ Å}$) em absorção de origem interestelar na direção de uma estrela quente pode ser representada aproximadamente pela função

$$I_\lambda \simeq 5.0 - 4.0 \sin \alpha$$

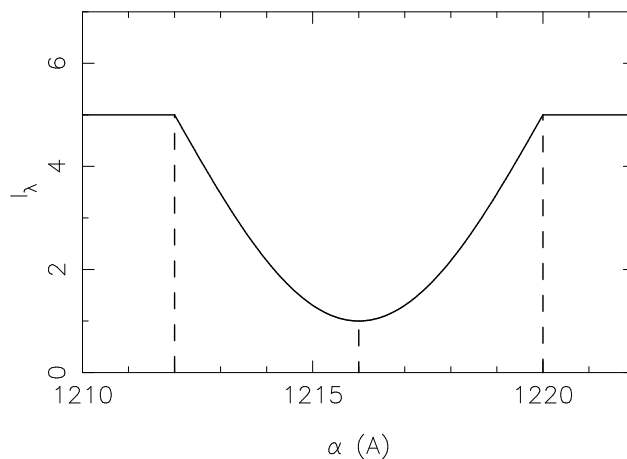
onde a intensidade I_λ está em unidades arbitrárias, o ângulo α está em radianos, e a relação é válida no intervalo $0 \leq \alpha \leq \pi$. O ângulo α está relacionado com o comprimento de onda em Å por

$$\alpha = \frac{\pi (\lambda - 1212)}{8}$$

(a) Faça um gráfico da intensidade I_λ em função do comprimento de onda λ para a linha espectral. (b) Determine a largura equivalente da linha em Å.

Solução:

(a) O gráfico está mostrado abaixo.



$$(b) \quad W_\lambda = \int_{1212}^{1220} \frac{I_c - I_\lambda}{I_c} d\lambda \simeq \int \frac{5 - (5 - 4 \sin \alpha)}{5} d\lambda = \int \frac{4 \sin \alpha}{5} d\lambda$$

$$d\alpha = \frac{\pi}{8} d\lambda$$

$$W_\lambda \simeq \int_0^\pi \frac{4 \sin \alpha}{5} \frac{8}{\pi} d\alpha \simeq \frac{32}{5\pi} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha$$

$$W_\lambda \simeq \frac{32}{5\pi} \left[-\cos \alpha \right]_0^\pi \simeq \frac{32}{5\pi} [1 + 1]$$

$$W_\lambda \simeq \frac{64}{5\pi} \simeq 4.07 \text{ \AA}$$

★ ★ ★

368. A largura equivalente W_λ para um perfil Doppler no caso de linhas fracas, onde a profundidade óptica $\tau_\nu \ll 1$, pode ser escrita

$$\frac{W_\lambda}{\lambda_{jk}} = \frac{\pi e^2}{m_e c^2} N_j f_{jk} \lambda_{jk} \quad (1)$$

onde λ_{jk} é o comprimento de onda central da linha, N_j é a densidade de coluna dos átomos responsáveis pela linha, e f_{jk} a força de oscilador. No caso mais geral, temos

$$\frac{W_\lambda}{\lambda_{jk}} = \frac{2 b F(\tau_0)}{c} \quad (2)$$

onde o parâmetro b é dado por $b = (2 k T / m)^{1/2}$ e a função F é dada por

$$F(\tau_0) = \int_0^\infty \left[1 - \exp \left(-\tau_0 e^{-x^2} \right) \right] dx \quad (3)$$

Mostre que a equação (2) reduz-se a equação (1) quando $\tau_\nu \ll 1$.

Solução:

Considerando as equações (2) e (3) temos

$$\frac{W_\lambda}{\lambda_{jk}} = \frac{2 b}{c} \int_0^\infty [1 - \exp(-\tau_0 e^{-x^2})] dx$$

com $\tau_0 \ll 1$ temos

$$\frac{W_\lambda}{\lambda_{jk}} = \frac{2 b}{c} \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-x^2} \tau_0)] dx$$

$$\frac{W_\lambda}{\lambda_{jk}} = \frac{2 b}{c} \tau_0 \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

$$\frac{W_\lambda}{\lambda_{jk}} = \frac{2 b \tau_0}{c} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

usando a relação

$$\tau_0 = \tau(\Delta\nu = 0) = N_j \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{jk} \frac{\lambda_{jk}}{b \sqrt{\pi}}$$

obtemos a equação (1)

★ ★ ★

369. Medidas da largura equivalente das linhas D do NaI em $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ em absorção na direção da estrela HD190066 (B1I) produzem o resultado $W \simeq 400 \text{ m\AA}$. (a) Suponha que a linha é fraca e calcule a densidade de coluna dos átomos de Na neutro na direção da estrela. Mostre que, neste caso, é válida a relação

$$N \simeq \frac{11.3 W}{\lambda^2 f}$$

onde N está em cm^{-2} , W em $\text{m\AA}$ e λ em cm . Use $f = 0.65$. (b) Uma análise da saturação da linha sugere um fator de correção da ordem de 6 para a densidade de coluna. Aplique este fator ao resultado (a) e estime a densidade de coluna total de Na, considerando que 99% dos átomos de sódio estão ionizados. (c) Estime a densidade eletrônica da nuvem interestelar considerando que a taxa de ionização e o coeficiente de recombinação do Na^0 são $\Gamma \simeq 2 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$ e $\alpha \simeq 1 \times 10^{-11} \text{ cm}^3/\text{s}$, respectivamente.

Solução:

(a) A largura equivalente é

$$W = \frac{\pi e^2}{m_e c^2} N f \lambda^2$$

de modo que

$$N \simeq \frac{m_e c^2}{\pi e^2} \frac{W}{\lambda^2 f}$$

$$N(\text{cm}^{-2}) \simeq 11.3 \frac{W(\text{m\AA})}{\lambda^2(\text{cm}^2) f}$$

portanto

$$N'(\text{Na}^0) \simeq 2 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$$

(b) Neste caso

$$N(\text{Na}^0) \simeq 6 N'(\text{Na}^0) \simeq 1.2 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$$

$$\frac{N(\text{Na}^+)}{N(\text{Na})} \simeq 0.99 \quad \frac{N(\text{Na}^0)}{N(\text{Na})} \simeq 0.01 \quad \frac{N(\text{Na}^+)}{N(\text{Na}^0)} \simeq 99$$

$$N(Na) \simeq \frac{N(Na^0)}{0.01} \simeq 1.2 \times 10^{15} \text{ cm}^{-2}$$

(c) Da equação de equilíbrio de ionização

$$N(Na^0) \Gamma(Na^0) = N(Na^+) n_e \alpha(Na^0)$$

$$n_e \simeq \frac{N(Na^0)}{N(Na^+)} \frac{\Gamma(Na^0)}{\alpha(Na^0)} \simeq 2 \times 10^{-2} \text{ cm}^{-3}$$

★ ★ ★

370. As linhas D1 ($\lambda = 5896 \text{ \AA}$) e D2 ($\lambda = 5890 \text{ \AA}$) do Na I são formadas a partir do estado fundamental, e a força de oscilador de D2 é o dobro da força de oscilador de D1. Determine a razão das larguras equivalentes dessas linhas, W_{D2}/W_{D1} nos seguintes casos: (a) linhas fracas, na parte linear da curva de crescimento; (b) linhas moderadamente fortes, na parte de saturação da curva de crescimento; (c) linhas fortes, na parte raiz quadrada da curva de crescimento.

Solução:

(a) $W \propto f$

$$\frac{W_2}{W_1} \simeq \frac{f_2}{f_1} \simeq 2$$

(b) $W \propto \sqrt{\ln f}$

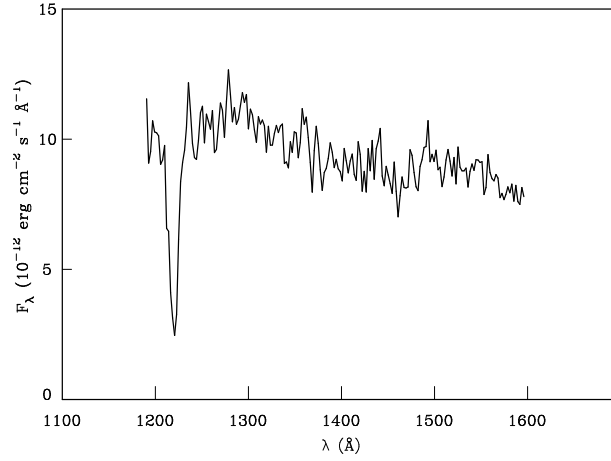
$$\frac{W_2}{W_1} \simeq 1$$

(c) $W \propto \sqrt{f}$

$$\frac{W_2}{W_1} \simeq \sqrt{f_2/f_1} \simeq 1.4$$

★ ★ ★

371. A figura a seguir mostra o espectro ultravioleta na direção da estrela central da nebulosa planetária NGC 2392, obtido com o *International Ultraviolet Explorer* (IUE). A estrela é muito quente, e a linha Lyman- α ($\lambda = 1216 \text{ \AA}$) aparece em absorção de origem interestelar. (a) Estime o fluxo no contínuo na região da linha; (b) Estime a área S dentro da linha; (c) a largura equivalente da linha em $\text{\AA}$.



Solução:

(a) O fluxo contínuo é aproximadamente

$$F_c \simeq 10 (10^{-12} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1})$$

(b) A área S dentro da linha é aproximadamente

$$S \simeq 100 (10^{-12} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1})$$

(c) A largura equivalente pode ser obtida por

$$W_\lambda = \frac{S}{I_c} \simeq 100/10 \simeq 10 \text{ \AA}$$

★ ★ ★

372. Considere o resultado obtido no exercício anterior e note que a área S é uma medida do fluxo da radiação da estrela removido do feixe que atravessa a nuvem interestelar. Compare este valor com o fluxo total que efetivamente seria observado se não houvesse extinção interestelar. Adote uma temperatura efetiva $T_{ef} \simeq 70000 \text{ K}$, uma luminosidade $L \simeq 10^3 L_\odot$, e uma distância $d \simeq 1 \text{ kpc}$ para a estrela.

Solução:

O fluxo total na superfície da estrela é

$$F_R \simeq \sigma T_{ef}^4 \simeq (5.67 \times 10^{-5}) (70000)^4 \simeq 1.36 \times 10^{15} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

o fluxo total que seria observado se não houvesse extinção é

$$F_d \simeq F_R \left(\frac{R}{d} \right)^2$$

$$\text{mas } L = 4 \pi R^2 F_R$$

de modo que

$$R \simeq \sqrt{\frac{L}{4\pi F_R}} \simeq 1.5 \times 10^{10} \text{ cm}$$

portanto

$$F(d) \simeq 1.36 \times 10^{15} \left[\frac{1.5 \times 10^{10}}{3.09 \times 10^{21}} \right]^2 \simeq 3.2 \times 10^{-8} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$\frac{F_d}{S} \simeq \frac{3.2 \times 10^{-8}}{1.0 \times 10^{-10}} \simeq 320$$

o fluxo correspondente à linha Lyman do H é cerca de 320 vezes menor que o fluxo total observado na distância d .

★ ★ ★

373. Considere novamente o Exercício 371, admita que a linha é saturada, ocupando a região de raiz quadrada da curva de crescimento. Nesse caso, considerando apenas dois níveis de energia j, k , a largura equivalente pode ser escrita

$$W_\lambda = \frac{2\pi e^2}{m_e c^2} f_{jk} \lambda_{jk} \left(2 \frac{g_j}{g_k} N_j \right)^{1/2}$$

onde $\lambda_{jk} = 1215.67 \text{ Å}$, $f_{jk} = 0.4162$, $g_j = 2$, $g_k = 6$. Use o resultado obtido para a largura equivalente estime a densidade de coluna do H interestelar. (b) Admita que a distância da nebulosa é $d \simeq 1.0 \text{ kpc}$ e que o gás interestelar está uniformemente distribuído, e estime sua densidade volumétrica média. (c) Considerando uma nuvem interestelar “típica” com dimensões de 10 pc , qual seria a densidade volumétrica da nuvem?

Solução:

Com os valores dados dos parâmetros a largura equivalente fica

$$W_\lambda = 7.3 \times 10^{-10} \sqrt{N_j}$$

com $W_\lambda = 10 \text{ Å}$, obtemos

$$N_H = 1.9 \times 10^{18} W_\lambda^2 \simeq 1.9 \times 10^{20} \text{ cm}^{-2}$$

(b) A densidade volumétrica é

$$n_b \simeq \frac{N_H}{d} \simeq \frac{1.9 \times 10^{20}}{3.09 \times 10^{21}} \simeq 0.06 \text{ cm}^{-3}$$

(c) Neste caso temos

$$n_c \simeq \frac{1.9 \times 10^{20}}{3.09 \times 10^{19}} \simeq 6.1 \text{ cm}^{-3}$$

★ ★ ★

AQUECIMENTO E RESFRIAMENTO

374. Uma nuvem interestelar é aquecida por dois processos: (i) pela ionização do H pelos raios cósmicos a uma taxa $\zeta_H = 5 \times 10^{-16} \text{ s}^{-1}$, correspondendo a fotoelétrons com energia média de 5 eV e (ii) pela radiação estelar, por meio da fotoionização do carbono. O resfriamento da nuvem é feito exclusivamente pela excitação colisional do C pelos elétrons. A nuvem tem uma densidade $n_H = 1 \text{ cm}^{-3}$ e uma ionização fracional $x = n_e/n_H = 0.1$. Admita que todos os átomos de carbono estão ionizados e que a abundância de carbono é de $4 \times 10^{-4} n_H$ e, ainda, que 75% dos átomos de C estão armazenados nos grãos interestelares. (a) Estime a função aquecimento ($\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$) pelos raios cósmicos. (b) Estime a função aquecimento pela radiação estelar para as temperaturas típicas das nuvens. Qual dos processos é dominante? (c) Estime a função resfriamento pelos íons de C. (d) Estime a temperatura da nuvem.

Solução:

$$(a) \Gamma_{RC} \simeq n_H \zeta_H \bar{E} = (1 \text{ cm}^{-3}) (5 \times 10^{-16} \text{ s}^{-1}) (5 \text{ eV})$$

$$\Gamma_{RC} \simeq 2.5 \times 10^{-15} \text{ eV cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \simeq 4.0 \times 10^{-27} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$$

A função de aquecimento radiativo pode ser escrita (Maciel 2002, cap. 7)

$$(b) \Gamma_{rad} \simeq 1.3 \times 10^{-26} x n_H^2 T^{-1/2} \left(\frac{1}{4} \right) \simeq 3.25 \times 10^{-28} T^{-1/2}$$

Os valores obtidos estão na tabela a seguir.

T	10	20	30	40	50
$10^{28} \Gamma_{rad}$	1.03	0.73	0.59	0.51	0.46
$10^{28} \Gamma_{tot}$	41.03	40.73	40.59	40.51	40.46
$10^{28} \Lambda$	0.23	16.25	61.48	114.61	162.29

os raios cósmicos são dominantes.

(c) A função resfriamento pode ser aproximada por (Maciel 2002, cap. 7)

$$\Lambda \simeq 8.6 \times 10^{-6} n_e n_C T^{-1/2} e^{-E/kT} \frac{E \Omega}{g}$$

onde E é a energia perdida pelo elétron na excitação colisional, e Ω é a força de colisão. Para o CII podemos adotar os valores

$$E \simeq 0.0079 \text{ eV}, \Omega \simeq 1.33, g = 2$$

temos

$$n_e \simeq 0.1 n_H \simeq 0.1 \text{ cm}^{-3}$$

$$n_C = \left(\frac{1}{4}\right) 4 \times 10^{-4} n_H \simeq 1.0 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-3}$$

$$\Lambda \simeq 7.23 \times 10^{-25} T^{-1/2} e^{-92.0/T} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$$

$$(d) \Gamma_{tot} = \Lambda \longrightarrow T \simeq 25 \text{ K}$$

★ ★ ★

375. Considere uma nuvem interestelar com $n_H = 20 \text{ cm}^{-3}$ aquecida pela ionização do H por partículas cósmicas segundo a taxa $\zeta_H = 10^{-15} \text{ s}^{-1}$. (a) Estime a energia por cm^3 por segundo fornecida ao gás, admitindo que a energia média dos elétrons ejetados pelos raios cósmicos é de 3.4 eV. (b) Admita que a nuvem interestelar é resfriada apenas pela excitação colisional do C II por átomos de H. Considere um parâmetro de depleção $d_C = 0.2$ e obtenha a temperatura de equilíbrio da nuvem.

Solução:

(a) A função de aquecimento pelos raios cósmicos é dada por

$$\Gamma_{H,RC} \simeq n_H \zeta_H \bar{E} \simeq 6.8 \times 10^{-14} \text{ eV cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \simeq 1.1 \times 10^{-25} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$$

(b) Neste caso, a função resfriamento pode ser escrita (Maciel 2002, cap. 7)

$$\Lambda_{H,CII} \simeq 7.9 \times 10^{-27} n_H^2 d_C e^{-92.0/T} \simeq 6.3 \times 10^{-25} e^{-92.0/T} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$$

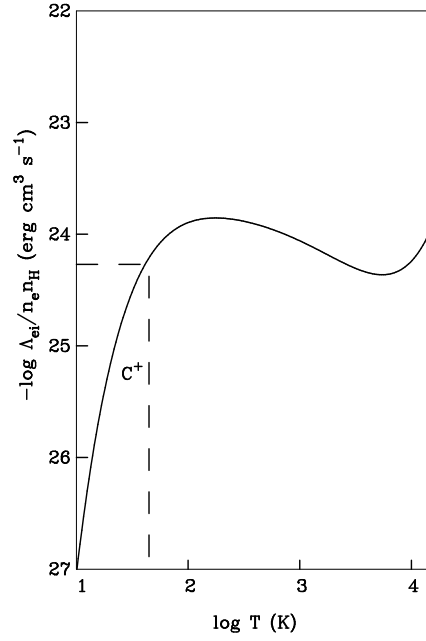
Os valores de $\Lambda_{H,CII}$ para diversas temperaturas estão na tabela a seguir

$\log T$	$\log \Lambda$
1.4	-25.8
1.6	-25.2
1.8	-24.8
2.0	-24.6
2.2	-24.4
2.4	-24.4

Para $\Gamma_{H,RC} \simeq \Lambda_{C,HII}(T_E)$ obtemos $T_E \simeq 53 \text{ K}$

★ ★ ★

376. Uma nuvem interestelar com densidade de 10^2 núcleos de H por centímetro cúbico é aquecida essencialmente pelo processo fotoelétrico envolvendo grãos, com um eficiência de 30%. (a) Desprezando a atenuação da radiação dentro da nuvem, qual é o ganho de energia ($\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$) devido a esse processo? (b) Supondo que o resfriamento se dá pela excitação colisional do íon C^+ por elétrons de acordo com a figura a seguir, qual é a temperatura da nuvem? Adote uma ionização fracional $n_e/n_H = 10^{-3}$.



Solução:

(a) Para o aquecimento fotoelétrico podemos usar a aproximação (Maciel 2002, p. 203)

$$\Gamma_e \simeq 1.8 \times 10^{-25} y_e n_H e^{-\tau} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$$

com os valores $y \simeq 0.30$, $n_H \simeq 100 \text{ cm}^{-3}$, $\tau \ll 1$

$$\Gamma_e \simeq 5.4 \times 10^{-24} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$$

(b) Com o valor obtido em (a)

$$\frac{\Gamma_e}{n_e n_H} \simeq \frac{5.4 \times 10^{-24}}{10^{-3} n_H^2} = 5.4 \times 10^{-25} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$$

em equilíbrio devemos ter

$$\frac{\Gamma_e}{n_e n_H} = \frac{\Lambda}{n_e n_H}$$

tomando o logaritmo

$$\log\left(\frac{\Gamma_e}{n_e n_H}\right) \simeq -24.27$$

da figura obtemos $\log T \simeq 1.65$, ou $T \simeq 45 \text{ K}$

★ ★ ★

377. Admita que os grãos sólidos de uma nuvem interestelar são esféricos, com raio $a = 100 \text{ Å}$ e densidade interna $s = 3 \text{ g/cm}^3$. (a) Qual é a seção de choque geométrica dos grãos? (b) Qual é a massa dos grãos relativamente à massa do átomo de H? (c) Estime a área projetada dos grãos por núcleo de hidrogênio

Σ_d , admitindo que a razão entre a massa total de grãos e a massa total de gás (razão grão-gás) é da ordem de $1/200$. (d) Estime a energia fornecida para aquecer a nuvem por emissão fotoelétrica, considerando uma nuvem com $n_H = 1 \text{ cm}^{-3}$. Admita que o fluxo dos fotoelétrons é $F_e = 2 \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$, e a energia média do fotoelétron é de 5 eV.

Solução:

$$(a) \sigma_g \simeq \pi a^2 \simeq 3.1 \times 10^{-12} \text{ cm}^2$$

$$(b) m_g \simeq \frac{4}{3} \pi a^3 s \simeq 1.3 \times 10^{-17} \text{ g} \simeq 7.5 \times 10^6 m_H$$

$$(c) \frac{1}{200} \simeq \frac{M_g}{M_H} = \frac{\rho_g}{\rho_H} = \frac{n_g m_g}{n_H m_H}$$

$$\frac{n_g}{n_H} \simeq 6.7 \times 10^{-10}$$

$$\Sigma_g = \sigma_g \frac{n_g}{n_H} = 2.1 \times 10^{-21} \text{ cm}^2$$

(d) A energia fornecida para aquecer a nuvem é, aproximadamente,

$$\Gamma_{ed} \simeq n_H \Sigma_g \bar{E}_2 F_e \simeq 2.1 \times 10^{-14} \text{ eV cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \simeq 3.4 \times 10^{-26} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$$

★ ★ ★

378. (a) Estime o tempo de resfriamento para uma nuvem HI com $T = 100 \text{ K}$, $n_H = 10 \text{ cm}^{-3}$ e $n_e/n_H = 10^{-3}$. Adote $\Lambda/n_H^2 \simeq 4 \times 10^{-27} \text{ erg cm}^3 \text{ s}^{-1}$ para a função resfriamento. (b) Estime o tempo de recombinação para captura radiativa de um elétron por um elemento pesado X^r , definido por $1/t_r = n_e \alpha(X^r)$, onde $\alpha(X^r)$ é o coeficiente de recombinação radiativa. Compare as duas escalas de tempo.

Solução:

(a) O tempo de resfriamento pode ser escrito

$$t_T \simeq \frac{3}{2} k T \frac{1}{n_H (\Lambda/n_H^2)}$$

válido para $n_e/n_H \ll 1$. Obtemos então

$$t_T \simeq 5.2 \times 10^{11} \text{ s} = 1.6 \times 10^4 \text{ anos}$$

(b) O coeficiente de recombinação pode ser estimado por

$$\alpha \simeq \frac{10^{-13}}{(T/10^4)^{1/2}} \simeq 1.0 \times 10^{-12} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

o tempo de recombinação é então

$$t_r \simeq \frac{1}{n_e \alpha}$$

$$t_r \simeq 1.0 \times 10^{14} \text{ s} \simeq 3.2 \times 10^6 \text{ anos}$$

$$\frac{t_T}{t_r} \simeq 5.2 \times 10^{-3} \ll 1$$

★ ★ ★

379. Suponha que a função resfriamento para as temperaturas características do meio internuvens seja dada por $\Lambda/n_H^2 \simeq 3 \times 10^{-26} \text{ erg cm}^3 \text{ s}^{-1}$. O modelo de Bakes e Tielens (1994) prediz uma taxa de aquecimento por átomo de hidrogênio da ordem de $7 \times 10^{-27} \text{ erg/s}$. Qual é a densidade desta região interestelar?

Solução:

$$\Lambda/n_H^2 \simeq 3 \times 10^{-26} \text{ erg cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

$$\Gamma/n_H \simeq 7 \times 10^{-27} \text{ erg/s}$$

$$\Gamma \simeq \Lambda$$

$$7 \times 10^{-27} n_H \simeq 3 \times 10^{-26} n_H^2$$

$$n_H \simeq \frac{7 \times 10^{-27}}{3 \times 10^{-26}} \simeq 0.23 \text{ cm}^{-3}$$

★ ★ ★

380. A região do meio interestelar local chamada Bolha Local pode ser caracterizada por uma emissão em raios X moles correspondente a cerca de 200 luminosidades solares. (a) Mostre que esta emissão pode ser produzida por um gás quente com $T \simeq 10^6 \text{ K}$ de baixa densidade, com $n \simeq 0.1 \text{ cm}^{-3}$, localizado em uma região de raio $R \simeq 100 \text{ pc}$, considerando que a escala de tempo de resfriamento deste gás é da ordem de $t \simeq 2 \times 10^7 \text{ anos}$. (b) Um processo alternativo para produzir a emissão observada é devido ao fluxo observado de raios cósmicos, da ordem de $F \simeq 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Admitindo que essas partículas estão confinadas dentro de uma superfície esférica de raio $R \simeq 100 \text{ pc}$, mostre que elas têm energia suficiente para prover a luminosidade observada.

Solução:

(a) A energia emitida é

$$E \simeq n k T V \simeq (0.1) (1.38 \times 10^{-16}) (10^6) (4/3) \pi (100 \times 3.09 \times 10^{18})^3$$

$$E \simeq 1.7 \times 10^{51} \text{ erg}$$

$$t \simeq 2 \times 10^7 \text{ ano} \simeq (2 \times 10^7) (3.17 \times 10^7) \simeq 6.3 \times 10^{14} \text{ s}$$

portanto, a luminosidade do gás é

$$L \simeq \frac{E}{t} \simeq 2.7 \times 10^{36} \text{ erg/s} \simeq 700 L_{\odot}$$

(b) Neste caso a luminosidade é

$$L \simeq \pi R^2 F \simeq (3.14) (100 \times 3.09 \times 10^{18})^2 (10^{-5})$$

$$L \simeq 3.0 \times 10^{36} \text{ erg/s} \simeq 780 L_{\odot}$$

★ ★ ★

381. A emissão livre-livre (*bremsstrahlung*) do H pode dar uma contribuição à função resfriamento em regiões HII. Para um íon com densidade n_i e carga Z_i , a perda de energia por cm^3 e por segundo é dada por

$$\Lambda_{ff} = \frac{2^5 \pi e^6 Z_i^2}{3\sqrt{3} h m_e c^3} \left[\frac{2 \pi k T}{m_e} \right]^{1/2} n_i n_e g_{ff}$$

onde $g_{ff} \simeq 1$ é o fator de Gaunt. (a) Estime $\Lambda_{ff}/n_p n_e$ para uma região HII de H puro com $T = 10^4$ K. (b) Estime $\Lambda_{ff}/n_p n_e$ para uma região HII contendo H e He. Admita que ambos estão uma vez ionizados, e considere uma abundância normal para o He. (c) Compare seus resultados com os valores equivalentes obtidos para o resfriamento devido à excitação colisional, $\Lambda_{coll}/n_p n_e \simeq 2.8 \times 10^{-24} \text{ erg cm}^3 \text{ s}^{-1}$.

Solução:

$$(a) \frac{\Lambda_{ff}}{n_p n_e} = (1.426 \times 10^{-27}) (10^2) = 1.426 \times 10^{-25} \text{ erg cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

$$(b) \frac{\Lambda_{ff}}{n_p n_e} = \frac{\Lambda_{H^+}}{n_p n_e} + \frac{\Lambda_{He^+}}{n_p n_e}$$

$$\frac{\Lambda_{ff}}{n_p n_e} \simeq 1.426 \times 10^{-25} \frac{n_p + n_{He^+}}{n_p} \simeq 1.426 \times 10^{-25} \left(1 + \frac{n_{He^+}}{n_p} \right)$$

$$\frac{\Lambda_{ff}}{n_p n_e} \simeq 1.426 \times 10^{-25} (1 + 0.1) \simeq 1.57 \times 10^{-25} \text{ erg cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

$$(c) \frac{\Lambda_{ff}}{n_p n_e} \ll \frac{\Lambda_{coll}}{n_p n_e}$$

★ ★ ★

382. O coeficiente de emissão j_{ν} para radiação livre-livre pode ser escrito

$$4 \pi j_{\nu} = \frac{32 \pi^{3/2} e^6 Z^2}{3^{3/2} m_e^2 c^3} \sqrt{\frac{2 m_e}{k T_e}} g_{eff}(\nu, T_e) n_i n_e e^{-h\nu/kT_e}$$

(Kwok 2007). Mostre que esta expressão pode ser colocada na forma

$$4 \pi j_{\nu} \simeq 6.84 \times 10^{-38} Z^2 n_i n_e T_e^{-1/2} g_{eff}(\nu, T_e) e^{-h\nu/kT_e} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$$

Solução:

A expressão pode ser escrita

$$4\pi j_\nu \simeq K Z^2 n_i n_e T_e^{-1/2} g_{eff} e^{-h\nu/kT_e}$$

onde

$$K = \frac{32\pi^{3/2} e^6}{3^{3/2} m_e^2 c^3} \sqrt{\frac{2m_e}{k}} = 6.84 \times 10^{-38}$$

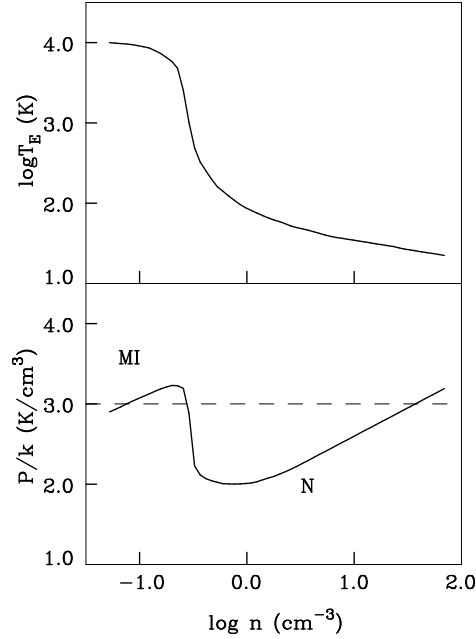
$$4\pi j_\nu \text{ tem unidades } \text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$$

★ ★ ★

383. Explique qualitativamente a existência de um meio interestelar com duas fases a partir da análise de instabilidades térmicas.

Solução:

Considerando processos de aquecimento e resfriamento, são obtidos gráficos como os da figura a seguir, mostrando a variação da temperatura de equilíbrio e da pressão com a densidade numérica do gás. Regiões estáveis, onde P aumenta com n , ocorrem para baixas densidades e altas temperaturas (meio internuvens, MI), e altas densidades e baixas temperaturas (nuvens, N). As regiões intermediárias sofrem instabilidades térmicas, onde P decresce quando n aumenta.



★ ★ ★

NEBULOSAS FOTOIONIZADAS

384. A tabela a seguir (Maciel 2002, cap. 8) relaciona as temperaturas efetivas (T_{ef}) e raios (R_*) de estrelas quentes da sequência principal. Considere esses dados e estime o número de fótons ionizantes emitidos pelas estrelas por segundo Q_* . Use fluxos de corpo negro, e compare seus resultados com os valores dados na tabela, os quais foram obtidos com o uso de modelos de atmosferas.

tipo	T_{ef} (K)	R_* ($R_\odot$)	$Q(m)$ (10^{48} s^{-1})
O5	47 000	13.8	51
O6	42 000	11.5	17.4
O7	38 500	9.6	7.2
O8	36 500	8.5	3.9
O9	34 500	7.9	2.1
B0	30 900	7.6	0.43
B1	22 600	6.2	0.0033

Solução:

O fluxo “astrofísico” é

$$\mathcal{F}_\nu = \pi F_\nu = \pi F_\nu^+ = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} I_\nu \cos\theta \sin\theta d\theta = \pi B_\nu(T_{ef})$$

o número de fótons ionizantes por segundo é

$$Q_* = 4\pi R_*^2 \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\pi F_\nu d\nu}{h\nu} = 4\pi R_*^2 \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\pi B_\nu(T_{ef}) d\nu}{h\nu}$$

$$Q_* = 4\pi R_*^2 \frac{2\pi}{c^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\nu^2 d\nu}{\exp(h\nu/kT_{ef}) - 1}$$

com a mudança de variáveis

$$x = \frac{h\nu}{kT_{ef}} \quad dx = \frac{h d\nu}{dT_{ef}} \quad x_0 = \frac{h\nu_0}{kT_{ef}}$$

$$Q_* = \frac{8\pi^2 R_*^2}{c^2} \left(\frac{kT_{ef}}{h} \right)^3 \int_{x_0}^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1}$$

$$\text{como } x \geq x_0 = \frac{h\nu_0}{kT_{ef}} = \frac{(13.6)(1.6 \times 10^{-12})}{(1.38 \times 10^{-16})(47000)} \simeq 3.35$$

onde usamos $T_{ef} = 47000 \text{ K}$

$$e^x \geq 29 \quad e^x - 1 \simeq e^x$$

chamando

$$I = \int_{x_0}^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \simeq \int_{x_0}^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x}$$

integrando por partes

$$u = x^2 \quad du = 2x dx$$

$$dv = e^{-x} dx \quad v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

$$I = -x^2 e^{-x} - \int (1 - e^{-x}) 2x dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx$$

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int (1 - e^{-x}) dx = -x e^{-x} - e^{-x}$$

$$u' = x \quad du' = dx$$

$$dv' = e^{-x} dx \quad v' = -e^{-x}$$

$$I = -x^2 e^{-x} + 2(-x e^{-x} - e^{-x}) = e^{-x}(-x^2 - 2x - 2)$$

tomando limites

$$I = 0 - e^{-x_0}(-x_0^2 - 2x_0 - 2) = (x_0^2 + 2x_0 + 2) e^{-x_0}$$

obtemos

$$Q_* = \frac{8\pi^2 R_*^2}{c^2} \left(\frac{k T_{ef}}{h} \right)^3 (x_0^2 + 2x_0 + 2) e^{-x_0}$$

os resultados estão na tabela a seguir

	O5	O6	O7	O8	O9	B0	B1
T_{ef} (K)	47	42	38.5	36.5	34.5	30.9	22.6
(10^3 K)							
$R/R_{\odot}$	13.8	11.5	9.6	8.5	7.9	7.6	6.2
Q_*	52.6	20.7	9.0	5.2	3.2	1.5	0.1
(10^{48} s^{-1})							
$Q(m)$	51	17.4	7.2	3.9	2.1	0.43	0.0033
(10^{48} s^{-1})							
$Q_*/Q(m)$	1.03	1.19	1.25	1.33	1.52	3.49	30.3

★ ★ ★

385. A medida de emissão na direção de uma região HII é de 10^3 pc/cm^6 e a densidade de coluna de núcleos de hidrogênio na mesma direção é de 10^{20} cm^{-2} . Estime a densidade eletrônica e as dimensões da região HII.

Solução:

Chamando ℓ a dimensão da região HII

$$ME = \int n_e^2 d\ell \simeq n_e^2 \ell = 10^3 \text{ pc/cm}^6$$

a densidade de coluna é

$$N_p \simeq n_p \ell \simeq n_e \ell \simeq 10^{20} \text{ cm}^{-2}$$

$$\frac{ME}{N_p} \simeq \frac{n_e^2 \ell}{n_e \ell} \simeq n_e \simeq \frac{10^3}{10^{20}} \frac{\text{pc}}{\text{cm}^6} \text{ cm}^2 \simeq (10^{-17}) (3.09 \times 10^{18}) \text{ cm}^{-3}$$

$$n_e \simeq 30 \text{ cm}^{-3}$$

$$\ell \simeq \frac{ME}{n_e^2} \simeq \frac{10^3}{30^2} \simeq 1.1 \text{ pc}$$

★ ★ ★

386. A região HII galáctica W49 tem uma medida de emissão dada por $\log ME = 6.23$ (unidades: pc cm^{-6}). As dimensões da região HII são da ordem de 7 pc. (a) Estime sua densidade eletrônica, admitindo que o gás está uniformemente distribuído na nebulosa. (b) Qual seria a massa total da região HII?

Solução:

A medida de emissão pode ser escrita

$$ME = \int n_e^2 d\ell \simeq n_e^2 \int d\ell = n_e^2 L$$

L é a dimensão da região HII, com uma distribuição uniforme do gás.

A densidade eletrônica é

$$n_e \simeq \sqrt{\frac{ME}{L}} \simeq \sqrt{\frac{10^{6.23}}{7}} \simeq \sqrt{\frac{1.7 \times 10^6}{7}} \simeq 490 \text{ cm}^{-3}$$

(b) Adotando $R \simeq L/2$ e $n_p \simeq n_e$, a massa da região HII é

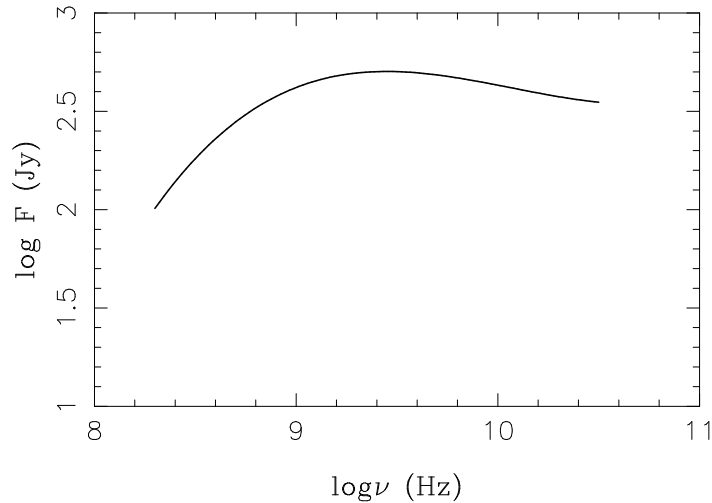
$$M \simeq \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \simeq \frac{4}{3} \pi \left(\frac{L}{2}\right)^3 n_e m_H$$

$$M \simeq 4.3 \times 10^{36} \text{ g} \simeq 2200 M_\odot$$

★ ★ ★

387. Regiões HII emitem radiação térmica em ondas de rádio, onde pode ser usada a distribuição de Rayleigh-Jeans, onde $I_\nu \propto \nu^{-2}$. Nesta faixa, a profundidade óptica é $\tau_\nu \propto \nu^{-2}$, de modo que para frequências mais baixas a profundidade

óptica é alta (caso opticamente espesso). À medida que a frequência aumenta, a profundidade óptica diminui, até alcançar uma situação em que $\tau_\nu \ll 1$ (caso opticamente fino). A figura a seguir mostra um espectro rádio da Nebulosa de Orion onde a ordenada é a densidade de fluxo, dada em Janskys ($1 \text{ Jy} = 10^{-23} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$). Em que frequência ocorre a transição entre os regimes opticamente espesso e opticamente fino?



Solução:

Para distribuição de Rayleigh-Jeans a intensidade é

$$I_\nu \propto \nu^2$$

no caso opticamente espesso, a intensidade é proporcional à função fonte

$$I_\nu \propto S_\nu \propto \nu^2$$

no caso opticamente fino

$$I_\nu \propto S_\nu \tau_\nu$$

como $S_\nu \propto \nu^2$ e $\tau_\nu \propto \nu^{-2}$, a intensidade fica aproximadamente constante.

Do espectro, a transição ocorre para

$$\log \nu \simeq 9.4, \quad \nu \simeq 2.5 \times 10^9 \text{ Hz} \simeq 2.5 \times 10^3 \text{ MHz}$$

★ ★ ★

388. Considere uma região HII esférica em torno de uma estrela de tipo espectral O6 V com temperatura efetiva $T_{ef} = 42000 \text{ K}$, contendo apenas hidrogênio com $n_H = n_e = 100 \text{ cm}^{-3}$. Estime o raio de Strömgren da região (em pc), considerando que sua temperatura eletrônica é $T \simeq 8000 \text{ K}$.

Solução:

O raio de Strömgen pode ser escrito como

$$R_S \simeq \left[\frac{3 Q_*}{4 \pi n_e n_H \alpha} \right]^{1/3}$$

Q_* : número de fótons ionizantes emitidos pela estrela por segundo

α : coeficiente de recombinação para os níveis acima do primeiro nível

admitindo corpo negro (cf. Exercício 384) obtemos

$$Q_* \simeq 2.07 \times 10^{49} \text{ s}^{-1}$$

$$\text{tomando } \alpha \simeq 3.1 \times 10^{-13} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

$$R_S \simeq 1.2 \times 10^{19} \text{ cm} \simeq 3.8 \text{ pc}$$

usando um modelo de atmosfera temos

$$Q_* \simeq 1.74 \times 10^{49} \text{ s}^{-1}$$

$$R_S \simeq 1.1 \times 10^{19} \text{ cm} \simeq 3.6 \text{ pc}$$

★ ★ ★

389. Uma estrela com $2.0 M_\odot$ na sequência principal alcança o ramo das gigantes, onde mantém uma taxa de perda de massa de $10^{-6} M_\odot/\text{ano}$ por um período de 10^6 anos. No topo do ramo assintótico das gigantes (AGB), ejeta uma nebulosa planetária com massa M_{np} , cuja estrela central evolui para tornar-se uma anã branca com massa de $0.7 M_\odot$. (a) Qual é a massa da nebulosa planetária? (b) Admitindo que a escala de tempo da nebulosa planetária seja de 20 mil anos, qual é a taxa de perda de massa média necessária ao processo de formação da nebulosa? Despreze a perda de massa durante a sequência principal.

Solução:

$$(a) M_{np} \simeq M_{SP} - \dot{M}_g t_g - M_{ab}$$

$$M_{np} \simeq 2.0 - (10^{-6} \times 10^6) - 0.7 \simeq 2.0 - 1.0 - 0.7 \simeq 0.3 M_\odot$$

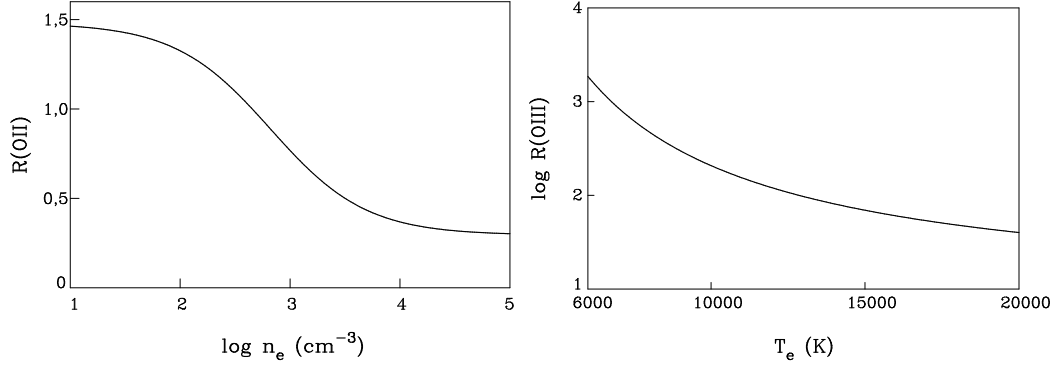
$$(b) \dot{M}_{np} \simeq \frac{M_{np}}{t_{np}} \simeq \frac{0.3}{2 \times 10^4} \simeq 1.5 \times 10^{-5} M_\odot/\text{ano}$$

★ ★ ★

390. Medidas das intensidades das linhas do oxigênio e enxofre na nebulosa planetária NGC 6302 produzem os seguintes resultados, já corrigidos pela extinção interestelar, em uma escala onde $I(H\beta) = 100.0$. [OIII]: $I(4959) = 361.4$; $I(5007) = 1352.0$; $I(4363) = 17.0$; [OII]: $I(3729) = 51.1$; $I(3726) = 53.9$; [SII]: $I(6716) = 11.3$; $I(6731) = 11.1$. Estime a temperatura e a densidade da nebulosa com base nas linhas do O II e O III.

Solução:

Podemos considerar as correlações entre as razões de linhas, a densidade eletrônica e a temperatura mostradas nas figuras abaixo (Maciel 2002)



de modo que as razões $R(OII)$ e $R(OIII)$ são dadas por

$$R(OII) \simeq \frac{I(3729)}{I(3726)} \simeq 0.95$$

$$R(OIII) \simeq \frac{I(4959) + I(5007)}{I(4363)} \simeq 100.79$$

das figuras obtemos

$$n_e \simeq 500 - 600 \text{ cm}^{-3}$$

$$T_e \simeq 13000 \text{ K}$$

★ ★ ★

391. A nebulosa planetária NGC 6853 (M27) tem temperatura eletrônica da ordem de $T \simeq 10^4 \text{ K}$, densidade eletrônica $n_e \simeq 10^4 \text{ cm}^{-3}$, dimensões $R \simeq 0.1 \text{ pc}$ e o fator de preenchimento $\epsilon \simeq 0.10$. (a) Qual é a energia térmica total armazenada na nebulosa? (b) Admita que a nebulosa tenha se originado a partir de uma estrela gigante vermelha com luminosidade $L \simeq 10^3 L_\odot$. Estime a escala de tempo necessária para que a energia radiativa da estrela seja suficiente para manter a energia térmica da nebulosa.

Solução:

(a) A energia térmica é

$$E_t \simeq \frac{4}{3} \pi R^3 \epsilon n_e k T$$

$$E_t \simeq \left(\frac{4}{3}\right) (3.14) (0.1 \times 3.09 \times 10^{18})^3 (0.1) (10^4) (1.38 \times 10^{-16}) (10^4)$$

$$E_t \simeq 1.7 \times 10^{44} \text{ erg}$$

(b) A escala de tempo pode ser estimada por

$$\Delta t \simeq \frac{E_t}{L} \sim \frac{1.7 \times 10^{44}}{(10^3)(3.85 \times 10^{33})} \simeq 4.4 \times 10^7 \text{ s} \simeq 1.4 \text{ ano}$$

a energia térmica armazenada na nebulosa corresponde à energia emitida pela estrela em apenas 1.4 ano

★ ★ ★

392. As maiores nebulosas planetárias observadas têm raios ionizados da ordem de $R \simeq 0.5 \text{ pc}$. (a) Considerando que a velocidade de expansão média das camadas externas da nebulosa é da ordem de 20 km/s , qual é o tempo de vida médio do estágio observável destes objetos? (b) Admita que na vizinhança solar existem cerca de 0.08 estrelas por pc^3 , e que a densidade espacial de nebulosas planetárias seja $n \simeq 40 \text{ kpc}^{-3}$. Em média, quantas estrelas existem na vizinhança solar para cada nebulosa planetária? (c) Admita que o resultado em (b) seja válido para toda a Galáxia. Qual seria então o número total de nebulosas planetárias na Galáxia? (d) Admitindo que a massa média das nebulosas planetárias é da ordem de $0.2 M_\odot$ que fração da massa total da Galáxia estaria sob a forma destas nebulosas?

Solução:

$$(a) \tau \simeq \frac{\Delta R}{v} \simeq \frac{(0.5)(3.09 \times 10^{18})}{(20 \times 10^5)(3.16 \times 10^7)} \simeq 24000 \text{ anos}$$

$$(b) \frac{n_*}{n_{np}} \simeq \frac{8 \times 10^7}{40} \simeq 2 \times 10^6$$

(c) Tomando $N_* \simeq 10^{11}$ para o número de estrelas na Galáxia, temos

$$\frac{N_*}{N_{np}} \simeq 2 \times 10^6$$

$$N_{np} \simeq \frac{N_*}{2 \times 10^6} \simeq 50000$$

(d) Adotando $M_G \simeq 1.5 \times 10^{11} M_\odot$, a fração é

$$f \simeq \frac{N_{np} M_{np}}{M_G} \simeq \frac{(5 \times 10^4)(0.2)}{1.5 \times 10^{11}} \simeq 6.7 \times 10^{-8}$$

★ ★ ★

393. A massa ionizada de uma nebulosa planetária pode ser escrita

$$M_i = \frac{4}{3} \pi R_i^3 \mu n_e \epsilon m_H$$

onde R_i é o raio ionizado, μ é o peso molecular médio, n_e é a densidade eletrônica, ϵ é o fator de preenchimento, que leva em conta a distribuição do gás ionizado na nebulosa e m_H é a massa do átomo de H. A densidade eletrônica pode ser escrita

$$n_e \propto F^{1/2} \epsilon^{-1/2} R_i^{-3/2} d \quad (1)$$

onde F é o fluxo livre-livre observado em 5 GHz e d é sua distância. (a) Mostre que a massa ionizada pode ser escrita na forma

$$M_i = \text{constante} \times F^{1/2} \epsilon^{1/2} \theta^{3/2} d^{5/2} \quad (2)$$

onde $\theta = R_i/d$ é o raio angular da nebulosa. (b) Mostre que a distância da nebulosa pode ser escrita

$$d = K F^{-1/5} \epsilon^{-1/5} \theta^{-3/5} M_i^{2/5} \quad (3)$$

onde K é uma constante. Este é o Método de Shklovsky para determinação de distâncias de nebulosas planetárias. (c) A constante $K \simeq 50$ se o fluxo em 5 GHz estiver em mJy, θ em segundos de arco, M_i em massas solares e d em kpc. Determine a distância da nebulosa NGC 7009, com os seguintes dados: $F \simeq 700$ mJy, $\epsilon \simeq 1$, $\theta \simeq 15''$ e $M_i \simeq 0.2 M_\odot$ [$1 \text{ mJy} = 10^{-29} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$].

Solução:

(a) A massa ionizada é

$$M_i \propto R_i^3 n_e \epsilon$$

da relação (1)

$$n_e \propto F^{1/2} \epsilon^{-1/2} R_i^{-3/2} d$$

portanto

$$M_i \propto F^{1/2} \epsilon^{1/2} R_i^{3/2} d$$

$$M_i \propto F^{1/2} \epsilon^{1/2} \theta^{3/2} d^{5/2}$$

que é a relação (2).

(b) da relação anterior temos

$$d = K F^{-1/5} \epsilon^{-1/5} \theta^{-3/5} M_i^{2/5}$$

que é a relação (3).

(c) neste caso

$$d(\text{kpc}) \simeq (50) (700^{-1/5}) (1) (15^{-3/5}) (0.2^{2/5})$$

$$d \simeq 1.4 \text{ kpc}$$

★ ★ ★

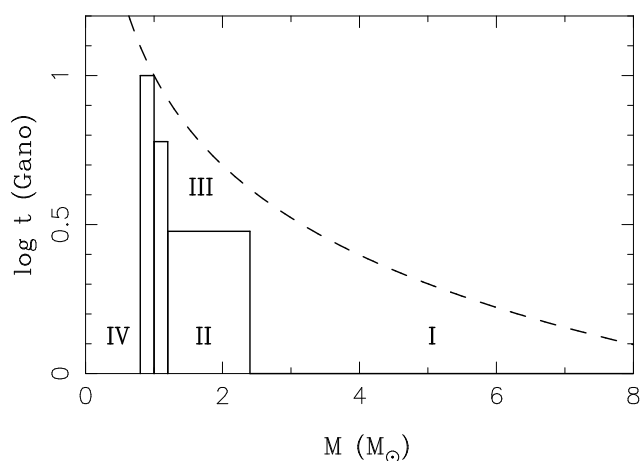
394. A tabela abaixo (Stasińska 2000) mostra propriedades médias das nebulosas planetárias galácticas, de acordo com o esquema de classificação de Peimbert. M é a massa da estrela progenitora e M_{ec} é a massa da estrela central. Use estes dados e faça um gráfico da idade $\log t$ da progenitora da nebulosa em função da

sua massa. Compare este resultado com idades obtidas admitindo simplesmente que $t(\text{Gano}) \simeq 10/M(M_\odot)$.

$M (M_\odot)$	$M_{ec} (M_\odot)$	Idade (Gano)	tipo
2.4 – 8.0	> 0.64	1	I
1.2 – 2.4	0.58 – 0.64	3	II
1.0 – 1.2	0.56	6	III
0.8 – 1.0	0.555	10	IV

Solução:

O gráfico está abaixo. A aproximação é razoável para os tipos II, III, IV



★ ★ ★

GRÃOS INTERESTELARES

395. Um grão esférico de olivina (Mg_2SiO_4) tem raio $a = 0.3 \mu\text{m}$ e densidade interna $s = 3 \text{ g/cm}^3$. Quantos átomos ao todo estão contidos no grão?

Solução:

A massa do grão é

$$m_g = \frac{4}{3} \pi a^3 s \simeq 3.39 \times 10^{-13} \text{ g}$$

considerando a composição do grão, com $A(\text{Mg}) = 24$, $A(\text{Si}) = 28$, $A(\text{O}) = 16$, a massa da molécula de Mg_2SiO_4 é

$$m_m = [(2 \times 24) + 28 + (4 \times 16)] \times 1.67 \times 10^{-24} \simeq 2.34 \times 10^{-22} \text{ g}$$

o número de moléculas por grão é

$$n_m = \frac{m_g}{m_m} \simeq \frac{3.39 \times 10^{-13}}{2.34 \times 10^{-22}} \simeq 1.45 \times 10^9$$

o número de átomos no grão é

$$n_a \simeq 7 n_m \simeq 1.02 \times 10^{10}$$

★ ★ ★

396. (a) Mostre que o acréscimo na magnitude de uma estrela produzido pela absorção interestelar pode ser escrito como

$$\Delta m(\lambda) = 1.086 \int_0^d n_g(r) \sigma(\lambda) Q_{ext}(\lambda) dr$$

onde d é a distância da estrela, n_g é a densidade de grãos, $\sigma(\lambda)$ a seção geométrica dos grãos para a radiação, e $Q_{ext}(\lambda)$ o fator de eficiência para extinção. (b) Como se modifica a expressão acima para uma distribuição homogênea de grãos?

Solução:

(a) A razão entre a intensidade observada I e a original I_0 é

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\tau}$$

onde τ é a profundidade óptica. Portanto

$$\Delta m(\lambda) = -2.5 \log(I/I_0) = -2.5 \log e^{-\tau} = (-2.5)(-\tau) \log e \simeq 1.086 \tau$$

a profundidade óptica é

$$\tau = \int n_g(r) \sigma(\lambda) Q_{ext}(\lambda) dr$$

considerando as duas últimas equações obtemos a relação procurada.

(b) Neste caso a relação é simplesmente

$$\Delta m(\lambda) \simeq 1.086 n_g \sigma(\lambda) Q_{ext}(\lambda) d$$

★ ★ ★

397. (a) Mostre que a razão grãos-gás no meio interestelar pode ser escrita aproximadamente

$$\frac{\rho_g}{\rho_H} \simeq \frac{(4/3) R_V a s_g}{1.086 Q_{ext} (N_H/E_{B-V}) m_H}$$

onde ρ_g e ρ_H são as densidades dos grãos e do gás, respectivamente, Q_{ext} é o fator de eficiência para extinção, N_H é a densidade de coluna do gás, E_{B-V} o excesso de cor e R_V a razão entre a extinção geral e a seletiva. Os grãos são considerados

esféricos, com raio a e densidade interna s . (b) Estime a razão ρ_g/ρ_H usando valores típicos de R_V e N_H/E_{B-V} . Use $Q_{ext} \simeq 1$, $s \simeq 3 \text{ g/cm}^3$ e dimensões típicas dos grãos de silicatos.

Solução:

$$(a) \rho_H \simeq n_H m_H$$

$$\rho_g \simeq n_g m_g \simeq \frac{4}{3} \pi a^3 s n_g$$

$$\frac{\rho_H}{\rho_g} \simeq \frac{n_H}{n_g} \frac{m_H}{m_g} = \frac{n_H}{n_g} \frac{m_H}{(4/3) \pi a^3 s} \simeq \frac{N_H}{N_g} \frac{m_H}{(4/3) \pi a^3 s}$$

considerando a razão entre a densidade de coluna de gás e o excesso de cor

$$\chi = \frac{N_H}{E_{B-V}} = \frac{R_V N_H}{A_v} = \frac{R_V N_H}{1.086 N_g \pi a^2 Q_{ext}} = \frac{N_H}{N_g} \frac{R_V}{1.086 \pi a^2 Q_{ext}}$$

obtemos

$$\frac{\rho_H}{\rho_g} \simeq \frac{1.086 \pi a^2 Q_{ext} \chi}{R_V} \frac{m_H}{(4/3) \pi a^3 s_g} \simeq \frac{1.086 Q_{ext} \chi m_H}{(4/3) R_V a s_g}$$

de onde obtemos a relação procurada.

(b) Com os valores dados de Q_{ext} e s , adotando $R_V \simeq 3.2$ e

$\chi \simeq 5.9 \times 10^{21} \text{ cm}^{-2} \text{ mag}^{-1}$, obtemos

$$\frac{\rho_H}{\rho_g} \simeq \frac{83600}{a(\text{\AA})}$$

considerando valores típicos para o tamanho dos grãos

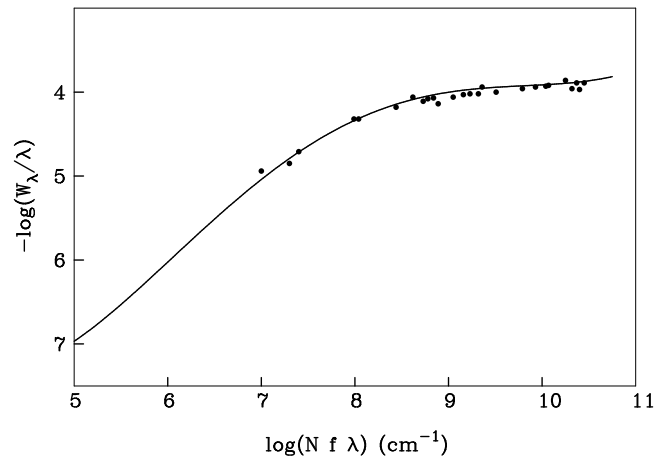
$$\frac{\rho_H}{\rho_g} \simeq 836 \quad \frac{\rho_g}{\rho_H} \simeq 1.2 \times 10^{-3} \quad (a = 100 \text{\AA})$$

$$\frac{\rho_H}{\rho_g} \simeq 167 \quad \frac{\rho_g}{\rho_H} \simeq 6.0 \times 10^{-3} \quad (a = 500 \text{\AA})$$

$$\frac{\rho_H}{\rho_g} \simeq 84 \quad \frac{\rho_g}{\rho_H} \simeq 1.2 \times 10^{-2} \quad (a = 1000 \text{\AA})$$

★ ★ ★

398. Uma estrela quente sofre avermelhamento interestelar com $E_{B-V} = 0.3$. A largura equivalente da linha D do Na I ($\lambda = 5890 \text{\AA}$, $f = 0.65$) interestelar na direção da estrela é $W_\lambda = 700 \text{ m\AA}$. (a) Qual é a densidade de coluna de H na direção da estrela? (b) A curva de crescimento obtida está mostrada a seguir. Estime a abundância interestelar de Na relativa ao H, ou seja, $\epsilon(\text{Na}) = \log(N_{\text{Na}}/N_{\text{H}}) + 12$. (c) Qual é o fator de depleção do Na, considerando uma abundância cósmica $\epsilon(\text{Na}) = 6.3$?



Solução:

(a) Podemos utilizar a relação

$$N_H \simeq 6 \times 10^{21} E_{B-V}$$

obtendo

$$N_H \simeq (6 \times 10^{21}) (0.3) \simeq 1.8 \times 10^{21} \text{ cm}^{-2}$$

(b) Com os dados temos

$$\log(W_\lambda/\lambda) = \log(0.7/5890) = -3.93$$

usando a curva de crescimento, temos

$$\log(N_{Na} f \lambda) \simeq 10$$

$$N_{Na} f \lambda \simeq 10^{10}$$

$$N_{Na} \simeq \frac{10^{10}}{f \lambda} \simeq \frac{10^{10}}{(0.65) (5890 \times 10^{-8})} \simeq 2.6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-2}$$

$$\epsilon_{mi}(\text{Na}) = \log(N_{Na}/N_H) + 12 \simeq 5.2$$

(c) O fator de depleção $f_d(\text{Na})$ é

$$f_d(\text{Na}) \simeq \epsilon_{mi}(\text{Na}) - \epsilon_c(\text{Na}) \simeq 5.2 - 6.3 \simeq -1.1$$

★ ★ ★

399. O objeto infravermelho IRC+10216 tem um diâmetro de 0.4 segundos de arco, correspondente a uma camada de poeira. (a) Considerando que o objeto está a uma distância de 200 pc, qual é o diâmetro da camada de poeira em cm e em unidades astronômicas (UA)? (b) A luminosidade total do objeto é 12000 vezes mais alta que a do Sol. Qual seria o seu raio (em cm e $R_\odot$), adotando uma temperatura efetiva de 2000 K?

Solução:

(a) Com $d = 200 \text{ pc}$ e $\phi = 0.4''$ temos

$$\frac{\phi}{2} = 0.2'' = 9.7 \times 10^{-7} \text{ rad} = \frac{D}{2d(3.09 \times 10^{18})}$$

de onde obtemos

$$D = 1.2 \times 10^{15} \text{ cm} \simeq 3.9 \times 10^{-4} \text{ pc} \simeq 80 \text{ AU}$$

(b) A luminosidade é

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$$

e o raio pode ser obtido por

$$R = \left(\frac{L}{4\pi\sigma T_{ef}^4} \right)^{1/2} = \left(\frac{12000 \times 3.85 \times 10^{33}}{4\pi\sigma (2000)^4} \right)^{1/2}$$

$$R \simeq 6.4 \times 10^{13} \text{ cm} \simeq 915 R_{\odot}$$

★ ★ ★

400. A distribuição de energia no infravermelho produzida pela poeira interestelar na vizinhança solar, obtida pelo satélite COBE, apresenta um pico localizado em $\lambda_{max} \simeq 140 \mu\text{m}$. Qual deve ser a temperatura dos grãos responsáveis pela emissão?

Solução:

De acordo com a lei de Wien temos

$$\lambda_{max} T \simeq 0.290$$

onde λ está em cm e T em K. A temperatura dos grãos deve ser

$$T \simeq \frac{0.290}{(140)(10^{-4})} \simeq 20 \text{ K}.$$

★ ★ ★

401. A densidade média do gás interestelar na vizinhança solar é de 1 átomo por cm^3 . (a) Quais devem ser as dimensões de um cubo de gás interestelar que, ao ser comprimido até um volume de 1 cm^3 , alcance a densidade média da atmosfera terrestre? Considere que, ao nível do mar há 6.0×10^{23} átomos em um volume de 22.4 litros. (b) Suponha que os grãos de poeira sejam esféricos com raio $a = 1000 \text{ \AA}$, e que a razão gás-poeira seja de 10^{12} átomos de H por grão. Que fração da luz de uma estrela seria interceptada ao atravessar uma espessura de 1 cm neste gás comprimido?

Solução:

(a) Com as definições

n_T : densidade na atmosfera da Terra
 n_g : densidade do gás interestelar
 N : número de átomos em um cubo de lado L ,

temos

$$n_T \simeq \frac{6.0 \times 10^{23}}{22.4 \ell} \simeq \frac{6.0 \times 10^{23}}{(22.4) (10^3)} \simeq 2.7 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$$

$$N \simeq n_g L^3 = n_T V$$

com $V = 1 \text{ cm}^3$ temos

$$L \simeq \left(\frac{n_T}{n_g} \right)^{1/3} \simeq 3 \times 10^6 \text{ cm} \simeq 30 \text{ km}$$

$$(b) I(x) = I_0 e^{-\tau}$$

$$I_0 - I(x) = I_0 - I_0 e^{-\tau} = I_0 (1 - e^{-\tau})$$

a fração interceptada é

$$f = \frac{I_0 - I(x)}{I_0} = 1 - e^{-\tau}$$

a profundidade óptica é

$$\tau \simeq k_g x \simeq \pi a^2 n_g x \simeq \pi a^2 \frac{n_T}{10^{12}} x$$

para $x = 1 \text{ cm}$ e $\tau \simeq 0.0085$ obtemos

$$f \simeq 0.0085 \simeq 0.85\%$$

★ ★ ★

402. A curva de extinção média de Mathis (1990) é normalizada relativamente à banda J ($\lambda = 1.25 \mu\text{m}$), o que a torna essencialmente independente da linha de visada. A tabela a seguir relaciona os valores de $A(\lambda)/A(J)$ para alguns comprimentos de onda, onde foi adotado $R_V = 3.1$, apropriado às nuvens difusas. Calcule as razões $E(\lambda, V)/E_{B-V}$ para os comprimentos de onda da tabela.

$\lambda(\mu\text{m})$	$A(\lambda)/A(J)$	$A(\lambda)/A(V)$	$E(\lambda, V)/E_{B-V}$
0.20	10.08	2.839	+5.70
0.55	3.55	1.000	+0.00
1.25	1.00	0.282	-2.23
2.20	0.382	0.108	-2.77
10.0	0.192	0.054	-2.93

Solução:

$$\frac{A(\lambda)}{A(J)} = \frac{A(\lambda)}{A(V)} \frac{A(V)}{A(J)}$$

$$\frac{A(V)}{A(J)} = 3.55$$

$$\frac{A(\lambda)}{A(V)} = \frac{1}{3.55} \frac{A(\lambda)}{A(J)}$$

$$\frac{E(\lambda, V)}{E_{B-V}} = \frac{A(\lambda) - A(V)}{E_{B-V}} = \frac{A(\lambda) - A(V)}{A(V)} R_V = \left[\frac{A(\lambda)}{A(V)} - 1 \right] R_V$$

$$R_V = \frac{A(V)}{E_{B-V}} = 3.1$$

As colunas 3 e 4 mostram os resultados para $A(\lambda)/A(V)$ e $E(\lambda, V)/E_{B-V}$

★ ★ ★

403. Adotando um valor $R_V = A_V/E_{B-V} = 3.1$, a extinção interestelar na região espectral caracterizada pelo comprimento de onda $\lambda = 1250 \text{ \AA}$ é $A_\lambda/A_{IC} \simeq 6.0$, onde I_C refere-se à banda I do sistema de Cousins, para a qual $\lambda_{IC} \simeq 8020 \text{ \AA}$. (a) Em uma linha de visada onde $R_V = 5.5$, devemos esperar um valor maior ou menor para a extinção A_λ/A_{IC} ? (b) Estime a extinção A_λ/A_{IC} para a linha de visada onde $R_V = 5.5$. Adote uma curva de extinção tal que $E(\lambda, V)/E_{B-V} \simeq 6.55$ para $\lambda = 1250 \text{ \AA}$ e $E(\lambda, V)/E_{B-V} \simeq -1.60$ para a banda I .

Solução:

(a) $R_V(2) > R_V(1)$, a linha 2 deve ter A_λ/A_{IC} menor

$$(b) \frac{A_\lambda}{A_{IC}} = \frac{A_V + E(\lambda, V)}{A_V + E(\lambda_{IC}, V)} = \frac{[A_V + E(\lambda, V)]/E_{B-V}}{[A_V + E(\lambda_{IC}, V)]/E_{B-V}}$$

$$\frac{A_\lambda}{A_{IC}} = \frac{R_V + E(\lambda, V)/E_{B-V}}{R_V + E(\lambda_{IC}, V)/E_{B-V}}$$

com $E(1250, V)/E_{B-V} \simeq 6.55$ e $E(I_C, V)/E_{B-V} \simeq -1.60$

$$\frac{A_\lambda}{A_{IC}} = \frac{5.5 + 6.55}{5.5 - 1.60} \simeq 3.1$$

★ ★ ★

404. A região HII W51 está localizada na direção do plano galáctico e apresenta uma atenuação da radiação na região visível do espectro de 25 magnitudes, aproximadamente, causada pela extinção interestelar. No infravermelho próximo, esta atenuação é de apenas 2.5 magnitudes. Qual é a redução do fluxo observado deste objeto nas faixas visível e infravermelha?

Solução:

$$\Delta m = 2.5 \log \frac{F}{F_{obs}}$$

no visível:

$$\Delta m = 25 \longrightarrow \frac{F}{F_{obs}} \simeq 10^{10}$$

no infravermelho:

$$\Delta m = 2.5 \longrightarrow \frac{F}{F_{obs}} \simeq 10$$

★ ★ ★

405. (a) A partir da definição do grau de polarização P , mostre que a polarização em magnitudes é dada por $p \simeq 2.17 P$ para $P \ll 1$. (b) A polarização interestelar máxima na direção de uma estrela é de 6.1%, ocorrendo para $\lambda = 5400 \text{ \AA}$. Medidas da polarização nesta direção na região azul do espectro produzem os resultados $P = 5.5\%$ e $P = 5.1\%$ para $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ e $\lambda = 3700 \text{ \AA}$, respectivamente. Aplique a lei de Serkowski

$$\frac{P}{P_{max}} = e^{-k \ln^2(\lambda_{max}/\lambda)}$$

e determine o valor médio da constante k para esta estrela.

Solução:

(a) Pela definição do grau de polarização

$$I = I_{max} + I_{min}$$

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{(I_{max}/I_{min}) - 1}{(I_{max}/I_{min}) + 1}$$

$$P \left(\frac{I_{max}}{I_{min}} + 1 \right) = \frac{I_{max}}{I_{min}} - 1$$

$$P \frac{I_{max}}{I_{min}} + P = \frac{I_{max}}{I_{min}} - 1$$

$$\frac{I_{max}}{I_{min}} (1 - P) = 1 + P \longrightarrow \frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{1 + P}{1 - P}$$

a polarização em magnitudes é

$$p = 2.5 \log \frac{I_{max}}{I_{min}} = (2.5) (\log e) \ln \frac{I_{max}}{I_{min}} = (2.5) (\log e) \ln \frac{1 + P}{1 - P}$$

$$p = (2.5) (0.4343) \ln \frac{1 + P}{1 - P} = (2.5) (0.4343) \left[\ln(1 + P) - \ln(1 - P) \right]$$

usando

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \dots \quad |x| \leq 1$$

obtemos

$$p = 1.086 [P + P] \simeq 2.17 P$$

(b) Da lei de Serkowski

$$k = \frac{\ln(P_{max}/P)}{\ln^2(\lambda_{max}/\lambda)}$$

com os valores dados, $P_{max} = 6.1$ para $\lambda_{max} = 5400 \text{ \AA}$

$$P_1 = 5.5 \quad \lambda_1 = 4000 \text{ \AA} \longrightarrow k_1 = 1.15$$

$$P_2 = 5.1 \quad \lambda_2 = 3700 \text{ \AA} \longrightarrow k_2 = 1.25$$

considerando o valor médio

$$\bar{k} \simeq 1.20$$

★ ★ ★

406. A luz galáctica difusa é produzida basicamente pelo espalhamento da radiação estelar pelos grãos interestelares. Considere uma nuvem de grãos esféricos com raio $a = 1000 \text{ \AA}$ e densidade interna $s = 3 \text{ g/cm}^3$ e uma densidade numérica $n_g (\text{cm}^{-3})$ em uma nuvem interestelar onde $n_H = 10 \text{ cm}^{-3}$. (a) Adote a razão grãos-gás dada por $\rho_g/\rho_H \sim 1/160$ e estime a densidade de grãos n_g . (b) Estime o coeficiente de absorção pelos grãos definido por unidade de volume (cm^{-1}), $k_g \simeq \sigma_g n_g$, onde σ_g é a seção geométrica dos grãos. (c) Estime o coeficiente de absorção correspondente para os átomos do gás para o espalhamento Rayleigh, em que $\sigma_R \simeq 10^{-24} \text{ cm}^2$. Que processo será dominante?

Solução:

A razão grãos-gás pode ser escrita

$$(a) \quad \frac{\rho_g}{\rho_H} \simeq \frac{1}{160} \simeq \frac{(4/3) \pi a^3 s n_g}{n_H m_H}$$

temos então

$$n_g \simeq \frac{n_H m_H}{(160) (4/3) \pi a^3 s} \simeq \frac{(10) (1.67 \times 10^{-24})}{(160) (4/3) (3.14) (10^{-15}) (3)}$$

$$n_g \simeq 8.3 \times 10^{-12} \text{ cm}^{-3}$$

$$(b) \quad k_g \simeq \sigma_g n_g \simeq \pi a^2 n_g \simeq 2.6 \times 10^{-21} \text{ cm}^{-1}$$

$$(c) \quad k_H \simeq \sigma_R n_H \simeq (10^{-24}) (10) \sim 10^{-23} \text{ cm}^{-1}$$

$k_g \gg k_H \longrightarrow$ o espalhamento pelos grãos é dominante.

★ ★ ★

407. O fator de depleção de um elemento X pode ser definido como

$$f_d(X) = [X/H] = \epsilon(X) - \epsilon(X)_{\odot}$$

onde $\epsilon(X) = \log(X/H) + 12$ é a abundância interestelar por número de átomos medida do elemento e $\epsilon(X)_{\odot} = \log(X/H)_{\odot} + 12$ é a abundância solar de referência. Mostre que a concentração do elemento X relativa ao H armazenada na poeira interestelar pode ser escrita

$$\left(\frac{X}{H}\right)_{pi} = \left(\frac{X}{H}\right)_{\odot} \left[1 - 10^{f_d}\right]$$

Solução:

Da definição de f_d

$$f_d(X) = \log(X/H) - \log(X/H)_{\odot}$$

$$10^{f_d} = \frac{X/H}{(X/H)_{\odot}}$$

$$\left(\frac{X}{H}\right)_{pi} = \left(\frac{X}{H}\right)_{\odot} - \left(\frac{X}{H}\right)$$

$$\left(\frac{X}{H}\right)_{pi} = \left(\frac{X}{H}\right)_{\odot} \left[1 - \frac{X/H}{(X/H)_{\odot}}\right] = \left(\frac{X}{H}\right)_{\odot} \left[1 - 10^{f_d}\right]$$

★ ★ ★

MOLECULAS INTERESTELARES

408. A separação internuclear de equilíbrio da molécula CS é $r_0 = 1.535 \text{ \AA}$. Qual é o comprimento de onda da transição rotacional correspondente a $J = 1 \rightarrow 0$?

Solução:

A energia de rotação é

$$E = B J(J + 1)$$

$$J = 0 \quad E = 0, \quad J = 1 \quad E = 2 B$$

$$\Delta E = 2 B = \frac{h c}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h c}{2 B} \quad (1)$$

$$B = \frac{h^2}{8 \pi^2 I} \quad (2)$$

$$I = \mu r_0^2 \quad (3)$$

I : momento de inércia da molécula

μ : massa reduzida da molécula

$$\mu = \frac{m_c m_s}{m_c + m_s} = \frac{12 \times 32}{12 + 32} m_H \simeq 8.73 m_H \simeq 1.46 \times 10^{-23} \text{ g}$$

usando (3)

$$I \simeq 3.44 \times 10^{-39} \text{ g cm}^2$$

usando (2)

$$B \simeq 1.62 \times 10^{-16} \text{ erg} \simeq 1.01 \times 10^{-4} \text{ eV}$$

usando (1)

$$\lambda = 6.1 \text{ mm}$$

★ ★ ★

409. A energia de dissociação da molécula de H_2O é $D \simeq 5.1 \text{ eV}$. No processo de dissociação



qual é o maior comprimento de onda da radiação que pode causar a dissociação?

Solução:

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} \simeq 5.1 \text{ eV}$$

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{D} \simeq 2.44 \times 10^{-5} \text{ cm} \simeq 2440 \text{ Å}$$

★ ★ ★

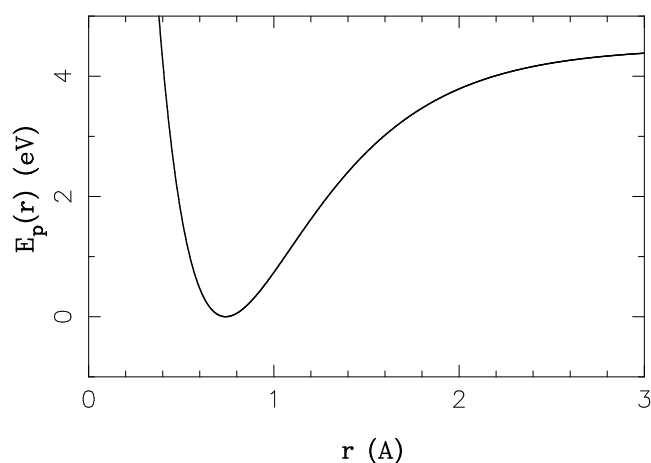
410. Uma expressão aproximada para a energia potencial de um estado ligado de uma molécula diatômica em uma dada configuração eletrônica é o potencial de Morse, dado por

$$E_p(r) = D \left[1 - e^{-a(r-r_0)} \right]^2$$

onde D , a e r_0 são constantes definidas para cada molécula. (a) Faça um gráfico de $E_p(r)$ em função de r , adotando $D = 4.48 \text{ eV}$, $a = 2$ e $r_0 = 0.74 \text{ Å}$. (b) Mostre que a função $E_p(r)$ tem um mínimo para $r = r_0$, que é interpretado como a separação de equilíbrio. (c) Mostre que $E_p(r) \rightarrow D$ para $r \rightarrow \infty$. O que acontece para $r \rightarrow 0$?

Solução:

(a) O gráfico está mostrado a seguir



(b) Devemos ter

$$\frac{dE_p}{dr} = 0$$

portanto

$$-2 D a e^{-a(r-r_0)} \left[1 - e^{-a(r-r_0)} \right] = 0$$

$$e^{-a(r-r_0)} = 1 \quad \longrightarrow \quad r = r_0$$

(c) $E_p(r_0) = 0$

$r \longrightarrow \infty \quad E_p(r) \rightarrow D$: energia de dissociação

$r \longrightarrow 0 \quad E_p(r)$ não tende a ∞ , mas

$$E_p(r) \longrightarrow D(1 - e^{a r_0})^2 \simeq 51.6 \text{ eV}$$

★ ★ ★

411. Uma molécula de H_2 em seu estado fundamental absorve um fóton com comprimento de onda $\lambda = 1000 \text{ \AA}$. Após a excitação, a molécula se dissocia com a emissão de um fóton de comprimento de onda $\lambda = 1700 \text{ \AA}$. Considerando que a energia de dissociação da molécula é $D = 4.48 \text{ eV}$, qual é a energia cinética média de cada átomo de H?

Solução:

$$\lambda_1 = 1000 \text{ \AA}$$

$$\nu_1 = c/\lambda_1 = 3.00 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

$$h \nu_1 = 12.4 \text{ eV}$$

$$\lambda_2 = 1700 \text{ \AA}$$

$$\nu_2 = 1.76 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

$$h \nu_2 = 7.30 \text{ eV}$$

$$h \nu_1 = h \nu_2 + D + 2 E_c$$

$$E_c = \frac{h \nu_1 - h \nu_2 - D}{2} \simeq 0.31 \text{ eV}$$

★ ★ ★

412. A linha espectral da molécula de CO correspondente à transição rotacional $J = 1 \rightarrow 0$ está centrada em $\nu_0 = 115.27 \text{ GHz}$. (a) Suponha que esta linha sofre alargamento Doppler e calcule a largura total à meia altura FWHM em uma nuvem molecular com $T = 50 \text{ K}$. (b) No modelo clássico de formação de linhas espectrais, o átomo é aproximado por um oscilador harmônico, de modo que a constante de amortecimento pode ser calculada por

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{m_e c^3}$$

onde ω_0 é a frequência angular da oscilação, e e m_e são a carga e massa do elétron, respectivamente. Estime a largura natural desta linha, e compare seu resultado com o valor obtido em (a).

Solução:

(a) No caso do alargamento Doppler temos

$$b = \sqrt{\frac{2 k T}{m}} = 1.72 \times 10^4 \text{ cm/s}$$

onde

$$m = m_{CO} = (12 + 16) m_H = 4.68 \times 10^{-23} \text{ g}$$

a FWHM é dada por

$$(FWHM)_D = (\Delta \nu_h)_D = \frac{2 b \nu_0 \sqrt{\ln 2}}{c} \simeq 110 \text{ kHz}$$

(b) A largura natural é

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{m_e c^3} = \frac{2}{3} \frac{e^2 4 \pi^2 \nu_0^2}{m_e c^3} = \frac{8 \pi^2 e^2 \nu_0^2}{3 m_e c^3} \simeq 3.28 \text{ Hz}$$

$$(FWHM)_N = (\Delta \nu)_N = \frac{\Gamma_k}{2 \pi} \simeq \frac{\gamma}{2 \pi} \simeq 0.52 \text{ Hz}$$

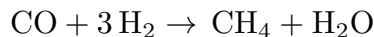
$$(\Delta \nu)_N \ll (\Delta \nu_h)_D$$

A partir do momento de dipolo medido desta linha, pode-se mostrar que

$(FWHM)_N$ é ainda muito menor que o valor calculado acima

★ ★ ★

413. Suponha que as abundâncias moleculares possam ser calculadas a partir do equilíbrio químico. Nesse caso, o equilíbrio entre as moléculas mais abundantes, H_2 e CO , e as moléculas CH_4 e H_2O pode ser escrito



Definindo a constante de equilíbrio K , podemos escrever

$$n(\text{CH}_4) n(\text{H}_2\text{O}) = k n(\text{CO}) n(\text{H}_2)^3$$

A constante pode ser obtida a partir da variação da entalpia da reação, sendo $k \simeq 10^{-2} \text{ cm}^6$, para $T \simeq 200 \text{ K}$. As nuvens interestelares têm $T \lesssim 100 \text{ K}$, de modo que este valor deve ser considerado um limite inferior. Considere uma nuvem em que $n(\text{H}_2) \simeq 10^4 \text{ cm}^{-3}$ e $n(\text{CO})/n(\text{H}_2) \simeq 10^{-6}$. Admitindo $n(\text{CH}_4) \simeq n(\text{H}_2\text{O})$, qual é a abundância de equilíbrio do metano? Compare seu resultado com a abundância de H_2O . Que conclusões você pode tirar sobre o equilíbrio químico na nuvem?

Solução:

$$n(\text{CO}) \simeq 10^{-6} n(\text{H}_2) \simeq 10^{-2} \text{ cm}^{-3}$$

$$n(\text{CH}_4)^2 \simeq K n(\text{CO}) n(\text{H}_2)^3$$

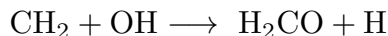
$$n(\text{CH}_4) \simeq \left[k n(\text{CO}) n(\text{H}_2)^3 \right]^{1/2} \simeq \left[(10^{-2}) (10^{-2}) (10^{12}) \right]^{1/2} \simeq 10^4 \text{ cm}^{-3}$$

k é limite inferior, portanto $n(\text{CH}_4) > 10^4 \text{ cm}^{-3} > n(\text{H}_2)$

CH_4 deve ser muito menos abundante que H_2 , portanto o equilíbrio químico não se aplica.

★ ★ ★

414. A reação



tem uma constante determinada experimentalmente, $k_A = 4 \times 10^{-11} \text{ cm}^3/\text{s}$ em $T = 300 \text{ K}$. (a) Adotando um fator pré-exponencial médio $A \simeq 1.0 \times 10^{-10} \text{ cm}^3/\text{s}$, qual é a energia de ativação da molécula? (b) Qual é a taxa de formação do formaldeído (H_2CO) em uma nuvem com $n(\text{H}_2) \simeq 10^4 \text{ cm}^{-3}$, $n(\text{OH})/n(\text{H}_2) \simeq 10^{-3}$ e $n(\text{CH}_2)/n(\text{H}_2) \simeq 10^{-8}$?

Solução:

(a) A taxa de reação é

$$r = \frac{dn(\text{H}_2\text{CO})}{dt} = k_A n(\text{CH}_2) n(\text{OH})$$

$$k_A = A e^{-E_a/kT}$$

obtemos

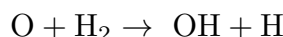
$$\ln k_A = \ln A - \frac{E_a}{kT}$$

$$E_a \simeq 3.79 \times 10^{-14} \text{ erg} \simeq 0.024 \text{ eV}$$

$$(b) \ r \simeq (4 \times 10^{-11}) (10^{-4}) (10) \simeq 4 \times 10^{-14} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$$

★ ★ ★

415. A reação



pode ter grande importância no interior de nuvens moleculares densas. Chamando k_A a taxa de reação, podemos escrever de forma aproximada a equação de Arrhenius

$$k_A = A \exp(-E_a/kT)$$

onde E_a é a energia de ativação da reação e A é um fator pré-exponencial, ambos independentes da temperatura. Medidas da taxa de reação mostraram que $k_A = 1.0 \times 10^{-14} \text{ cm}^3/\text{s}$ para $T = 600 \text{ K}$ e $k_A = 2.5 \times 10^{-16} \text{ cm}^3/\text{s}$ para $T = 400 \text{ K}$. (a) Determine os valores da energia de ativação e do fator pré-exponencial para esta reação. (b) Estime o valor da constante de reação para uma nuvem interestelar típica, com $T = 100 \text{ K}$. (c) Estime a taxa de destruição de átomos de oxigênio pela reação acima na nuvem interestelar na direção de $\zeta \text{ Oph}$, onde $n(\text{H}_2) \simeq 10^4 \text{ cm}^{-3}$ e $n(\text{O}) \simeq 7 \text{ cm}^{-3}$. (d) Estime a taxa de formação da molécula OH nas condições da letra (c).

Solução:

(a) Da equação de Arrhenius

$$\ln k_A = \ln A - \frac{E_a}{k} \frac{1}{T}$$

$$-32.24 = \ln A - \frac{E_a}{k} \frac{1}{600}$$

$$-35.93 = \ln A - \frac{E_a}{k} \frac{1}{400}$$

obtemos

$$E_a/k \simeq 4428, \quad E_a \simeq 6.11 \times 10^{-13} \text{ erg} \simeq 0.38 \text{ eV}$$

$$A \simeq 1.60 \times 10^{-11} \text{ cm}^3/\text{s}$$

(b) Usando a equação de Arrhenius

$$k_A \simeq 1.6 \times 10^{-11} e^{-4428/100} \simeq 9.4 \times 10^{-31} \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$(c) \frac{d(n_O)}{dt} \simeq -k_A n(O) n(H_2)$$

$$\frac{d(n_O)}{dt} \simeq -(9.4 \times 10^{-31}) (7) (10^4) \simeq -6.6 \times 10^{-26} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$$

$$(d) \frac{d(n_{OH})}{dt} \simeq -\frac{d(n_O)}{dt} \simeq 6.6 \times 10^{-26} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$$

★ ★ ★

416. Considere o processo de destruição das moléculas nas nuvens interestelares difusas pela fotodissociação. (a) Seja f_λ o fluxo ultravioleta do campo de radiação interestelar (fótons $\text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$) e σ_f a seção de choque de fotodissociação (cm^2) em uma banda de largura $\Delta\lambda$ ($\text{\AA}$). Qual é a escala de tempo necessária para a fotodissociação? (b) Estime o tempo t_f para um campo interestelar com fluxo $f_\lambda \simeq 10^5$ fótons $\text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$ com uma seção de choque $\sigma_f \simeq 10^{-17} \text{ cm}^2$ e $\Delta\lambda \simeq 100 \text{ \AA}$.

Solução:

O número de fotodissociações por unidade de tempo é dado por

$$n_f \simeq f_\lambda \sigma_f \Delta\lambda$$

a escala de tempo para fotodissociação pode ser escrita

$$t_f \simeq \frac{1}{n_f} \simeq \frac{1}{f_\lambda \sigma_f \Delta\lambda}$$

(b) Com os dados obtemos

$$t_f \simeq \frac{1}{(10^5) (10^{-17}) (100)} \simeq 1.0 \times 10^{10} \text{ s} \simeq 320 \text{ anos}$$

★ ★ ★

417. A escala de tempo de fotodissociação de moléculas em nuvens interestelares pode também ser escrita na forma

$$t_f \simeq \frac{1}{\beta_f} \simeq \frac{h}{\int U_\lambda \lambda \sigma_f d\lambda}$$

onde β_f é a taxa de fotodissociações (s^{-1}), U_λ ($\text{erg cm}^{-3} \text{ \AA}^{-1}$) é a densidade do campo de radiação no comprimento de onda λ e σ_f (cm^2) é a seção de choque de fotodissociação. Mostre que, em ordens de grandeza, esta equação pode ser escrita na forma obtida no exercício anterior.

Solução:

Da relação dada podemos escrever

$$t_f \simeq \frac{h}{\int U_\lambda \lambda \sigma_f d\lambda} \simeq \frac{h}{U_\lambda \lambda \sigma_f \Delta\lambda}$$

mas

$$U_\lambda = \frac{4\pi}{c} I_\lambda \simeq \frac{4\pi}{c} \frac{F_\lambda}{\pi} = \frac{4F_\lambda}{c}$$

onde F_λ é o fluxo em $\text{erg cm}^{-2} \text{ \AA}^{-1}$. Como

$$f_\lambda = \frac{F_\lambda}{h\nu} = \frac{F_\lambda \lambda}{hc}$$

obtemos

$$U_\lambda \simeq \frac{4h f_\lambda}{\lambda}$$

portanto

$$t_f \simeq \frac{h}{4h f_\lambda \sigma_f \Delta\lambda} \sim \frac{1}{f_\lambda \sigma_f \Delta\lambda}$$

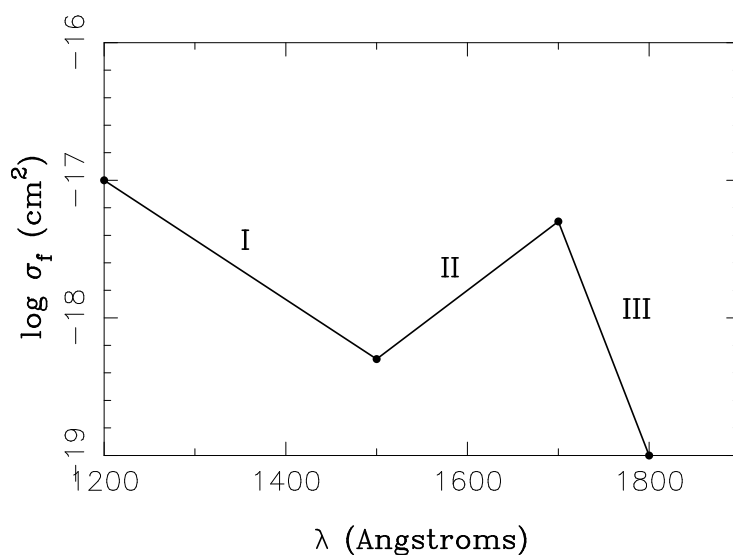
que é a relação obtida no exercício anterior

mais rigorosamente temos

$$t_f \simeq \frac{1}{\int f_\lambda \sigma_f d\lambda}$$

* * *

418. A seção de choque de fotodissociação da molécula de H_2O varia com o comprimento de onda do fóton da maneira indicada aproximadamente pela figura a seguir. Suponha que o fluxo ultravioleta do campo de radiação interestelar na faixa de 1200 a 1800 $\text{\AA}$ seja de $10^5 \text{ fótons cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$. Qual é a escala de tempo de vida (em anos) da molécula para fotodissociação?



Solução:

Usando a relação do exercício anterior a escala de tempo é

$$t_f \simeq \frac{1}{f_\lambda \int \sigma_f(\lambda) d\lambda}$$

pela figura podemos escrever

$$\frac{1}{t_f} \simeq f_\lambda \left[\int_I \sigma_f(\lambda) d\lambda + \int_{II} \sigma_f(\lambda) d\lambda + \int_{III} \sigma_f(\lambda) d\lambda \right]$$

fazendo um ajuste linear da forma $\log \sigma_f = A + B \lambda$, obtemos

$$\text{Região I: } A = -11.80 \quad B = -4.33 \times 10^{-3}$$

$$\text{Região II: } A = -25.80 \quad B = 5.00 \times 10^{-3}$$

$$\text{Região III: } A = 11.60 \quad B = -1.70 \times 10^{-2}$$

fazendo as integrais

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sigma_f d\lambda &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} 10^{A+B\lambda} d\lambda = 10^A \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} 10^{B\lambda} d\lambda = 10^A \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{B\lambda/\log e} d\lambda \\ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sigma_f d\lambda &= \frac{10^A \log e}{B} \left[e^{B\lambda/\log e} \right]_{\lambda_1}^{\lambda_2} = \frac{10^A \log e}{B} \left[e^{B\lambda_2/\log e} - e^{B\lambda_1/\log e} \right] \end{aligned}$$

calculando para as 3 regiões I, II, III

$$\text{I: } \int \sigma_f d\lambda = -1.59 \times 10^{-10} [3.20 \times 10^{-7} - 6.37 \times 10^{-6}] = 9.62 \times 10^{-16} \text{ cm}^2 \text{ \AA}$$

$$\text{II: } \int \sigma_f d\lambda = 1.38 \times 10^{-24} [3.16 \times 10^8 - 3.16 \times 10^7] = 3.92 \times 10^{-16} \text{ cm}^2 \text{ \AA}$$

$$\text{III: } \int \sigma_f d\lambda = -1.02 \times 10^{13} [2.51 \times 10^{-31} - 1.26 \times 10^{-29}] = 1.26 \times 10^{-16} \text{ cm}^2 \text{ \AA}$$

portanto

$$\frac{1}{t_f} \simeq 10^5 [9.62 \times 10^{-16} + 3.92 \times 10^{-16} + 1.26 \times 10^{-16}] \simeq 1.48 \times 10^{-10} \text{ s}^{-1}$$

$$t_f \simeq 6.76 \times 10^9 \text{ s} \simeq 214 \text{ anos}$$

★ ★ ★

419. A abundância de H_2 nas nuvens moleculares pode ser estimada a partir de medidas da intensidade de linhas do CO, que pode ser observado em rádio em sua linha de $4.6 \mu\text{m}$. Admita que a intensidade da linha de CO possa ser obtida da relação

$$I_{CO} = \int T_b(v) dv$$

onde $T_b(v)$ dá a variação da temperatura de brilho em função da velocidade radial observada. Nesse caso, a densidade de coluna de H_2 pode ser estimada por

$$N(\text{H}_2) \simeq X_{CO} I_{CO}$$

onde $X_{CO} \simeq 4 \times 10^{20} \text{ cm}^{-2} \text{ K}^{-1} (\text{km/s})^{-1}$. (a) Considere uma região próxima ao plano galáctico com uma temperatura de brilho aproximadamente constante $T_b \simeq 2 \text{ K}$ em um intervalo de velocidades radiais $\Delta v \simeq 20 \text{ km/s}$ e estime a densidade de coluna de H_2 . (b) Admita que a região tem dimensões $L \simeq 1 \text{ pc}$ e estime a densidade volumétrica da nuvem de H_2 . (c) Qual seria a densidade de coluna de CO admitindo que as abundâncias de C e O são semelhantes ao valor solar?

Solução:

(a) Da primeira relação acima obtemos

$$I_{CO} \simeq T_b \Delta v \simeq (2)(20) \simeq 40 \text{ K (km/s)}$$

de modo que

$$N(\text{H}_2) \simeq 1.6 \times 10^{22} \text{ cm}^{-2}$$

(b) A densidade $n(\text{H}_2)$ pode ser estimada por

$$n(\text{H}_2) \simeq \frac{N(\text{H}_2)}{L} \simeq 5.2 \times 10^3 \text{ cm}^{-3}$$

(c) Tomando

$$\frac{n(\text{CO})}{n(\text{H}_2)} \simeq \frac{n_C}{n_H} \simeq \frac{n_O}{n_H} \simeq 10^{-4}$$

$$N(\text{CO}) \simeq 10^{18} \text{ cm}^{-2}$$

★ ★ ★

420. (a) Determine a densidade de coluna do H_2 em uma direção próxima ao plano galáctico para a qual o excesso de cor é $E_{B-V} = 2.0$. Admita que $1/3$ dos núcleos de H estão na forma atômica, e o restante na forma molecular. (b) Medidas da intensidade da transição $J = 1 - 0$ em 2.6 mm do CO na mesma direção indicam uma temperatura de brilho $T_b \simeq 2 \text{ K}$, aproximadamente constante em um intervalo de velocidades radiais de cerca de 20 km/s . Considere um fator de calibração típico para a relação entre a intensidade da linha do CO e a abundância de H_2 e determine a densidade de coluna $N(\text{H}_2)$. Compare seu resultado com o valor em (a).

Solução:

(a) Podemos usar a relação aproximada

$$N(\text{H}) = N(\text{HI}) + 2 N(\text{H}_2) \simeq \chi E_{B-V}$$

considerando

$$N(\text{HI}) = \frac{1}{3} N(\text{H})$$

$$2N(\text{H}_2) = \frac{2}{3} N(\text{H}) \longrightarrow N(\text{H}_2) = \frac{1}{3} N(\text{H})$$

$$N(\text{H}_2) = \frac{\chi}{3} E_{B-V} = 3.9 \times 10^{21} \text{ cm}^{-2}$$

onde usamos um valor médio (cf. Exercício 397)

$$\chi = 5.9 \times 10^{21} \text{ cm}^{-2} \text{ mag}^{-1}$$

(b) Pelo exercício anterior a intensidade da linha de CO é

$$I_{CO} = \int T_b dv \simeq T_b \Delta v \simeq 40 \text{ K (km/s)}$$

usando o valor

$$X_{CO} = \frac{N(\text{H}_2)}{I_{CO}} \simeq 4 \times 10^{20} \text{ cm}^{-2} \text{ K}^{-1} (\text{km/s})^{-1}$$

$$N(\text{H}_2) = (4 \times 10^{20}) (40) = 1.6 \times 10^{22} \text{ cm}^{-2}$$

$$\frac{N(\text{H}_2)_b}{N(\text{H}_2)_a} \simeq 4.1$$

★ ★ ★

MASSA DE JEANS E FORMAÇÃO ESTELAR

421. Considere uma nuvem esférica com densidade constante ρ , temperatura T e peso molecular μ . Mostre que a massa mínima para que esta nuvem se condense para formar estrelas pode ser escrita na forma

$$M_J \simeq K \frac{T^{3/2}}{\mu^{3/2} \rho^{1/2}}$$

que é a massa de Jeans. Determine o valor da constante K medindo T em K, ρ em g/cm^3 e M_J em $M_\odot$. (cf. Exercício 136)

Solução:

Considerando o teorema do virial, temos

$$2 E_c + E_p = 0 \quad \longrightarrow \quad 2 E_c = |E_p| \quad (1)$$

onde E_c é a energia cinética térmica do gás e E_p a energia potencial.

A energia potencial pode ser escrita

$$|E_p| \simeq \frac{3}{5} \frac{G M^2}{R} \quad (2)$$

a energia cinética pode ser escrita

$$E_c \simeq \frac{3}{2} \frac{M}{\mu m_H} k T \quad (3)$$

considerando (1), (2), (3) obtemos

$$\frac{3 k T}{\mu m_H} = \frac{3 G M}{5 R} \quad (4)$$

a massa M pode ser escrita

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \quad \longrightarrow \quad R = \left(\frac{3 M}{4 \pi \rho} \right)^{1/3} \quad (5)$$

considerando (4) e (5) obtemos

$$\frac{3 k T}{\mu m_H} = \frac{3 G}{5} \left(\frac{4 \pi \rho}{3} \right)^{1/3} M^{2/3}$$

explicitando a massa

$$M^{2/3} = \frac{3 k T}{\mu m_H} \frac{5}{3 G} \left(\frac{3}{4 \pi \rho} \right)^{1/3}$$

ou seja

$$M = K \frac{T^{3/2}}{\mu^{3/2} \rho^{1/2}}$$

onde

$$K = \left(\frac{5 k}{G m_H} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4 \pi} \right)^{1/2}$$

$$\text{medindo } M \text{ em g} \longrightarrow K = 2.38 \times 10^{23} \text{ g}^{3/2} \text{ K}^{-3/2} \text{ cm}^{-3/2}$$

$$\text{medindo } M \text{ em } M_\odot: \longrightarrow K = 1.2 \times 10^{-10} M_\odot \text{ K}^{-3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{-3/2}$$

★ ★ ★

422. Que temperatura deve ter uma nuvem molecular com raio $R = 0.5 \text{ pc}$ e densidade $n = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ para evitar o colapso gravitacional?

Solução:

Para evitar o colapso, a massa deve ser menor que a massa de Jeans

$$M < M_J \simeq 1.2 \times 10^{-10} \frac{T^{3/2}}{\mu^{3/2} \rho^{1/2}}$$

onde M_J está em $M_\odot$, T em K e ρ em g/cm^3

portanto

$$T^{3/2} > \frac{\mu^{3/2} \rho^{1/2} M}{1.2 \times 10^{-10}}$$

$$T > \frac{\mu \rho^{1/3} M^{2/3}}{(1.2 \times 10^{-10})^{2/3}}$$

usando

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

$$T > \frac{\mu \rho^{1/3} (4/3)^{2/3} \pi^{2/3} R^2 \rho^{2/3}}{(1.2 \times 10^{-10})^{2/3} (1.99 \times 10^{33})^{2/3}}$$

substituindo

$$\rho = \mu n m_H$$

$$T > \left[\frac{4 \pi m_H^{3/2}}{3 (1.2 \times 10^{-10}) (1.99 \times 10^{33})} \right]^{2/3} n \mu^2 R^2$$

$$T > 1.1 \times 10^{-39} n \mu^2 R^2$$

com $\mu \simeq 1/2$

$$T > 59 \text{ K}$$

★ ★ ★

423. Considere uma nuvem esférica de raio R , massa M e densidade ρ tal que $M = (4/3) \pi R^3 \rho$. (a) Mostre que, em ordens de grandeza, o tempo de queda livre da nuvem é

$$t_{ql} \simeq \sqrt{\frac{3}{4 \pi G \rho}} \quad (1)$$

(b) Mostre que, mais rigorosamente,

$$t_{ql} \simeq \sqrt{\frac{3 \pi}{32 G \rho}} \quad (2)$$

(c) Qual é o tempo de queda livre de uma nuvem com $R = 30 \text{ pc}$ e $M = 500 M_\odot$?

Solução:

(a) A aceleração gravitacional na superfície da nuvem é aproximadamente

$$g(R) \simeq \frac{G M}{R^2}$$

$$\frac{d^2 R}{dt^2} \simeq \frac{R}{t_{ql}^2} \simeq g(R) \simeq \frac{G M}{R^2} \simeq \frac{G}{R^2} \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

$$t_{ql} \simeq \sqrt{\frac{3}{4 \pi G \rho}}$$

que é a equação (1)

(b) Mais rigorosamente

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{GM}{r} - \frac{GM}{R}$$

$$t_{ql} = \int_R^0 \frac{dt}{dr} dr = - \int_R^0 \left[\frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{R} \right]^{-1/2} dr$$

$$t_{ql} = \int_0^1 \frac{R dx}{\sqrt{\frac{2GM}{R} \left[\frac{1}{x} - 1 \right]^{1/2}}}$$

fazendo

$$x = \frac{r}{R} \quad dx = \frac{dr}{R}$$

$$t_{ql} = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}} \int_0^1 \left[\frac{x}{1-x} \right]^{1/2} dx = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}} \frac{\pi}{2}$$

pois

$$\int_0^1 \left[\frac{x}{1-x} \right]^{1/2} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$t_{ql} = \sqrt{\frac{\pi^2 R^3}{8GM}}$$

com

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$t_{ql} = \sqrt{\frac{\pi}{8GM} \frac{3M}{4\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}}$$

que é a equação (2)

$$(c) \rho \simeq \frac{M}{(4/3)\pi R^3} \simeq 3.0 \times 10^{-25} \text{ g/cm}^3$$

usando (2)

$$t_{ql} \simeq 3.84 \times 10^{15} \text{ s} \simeq 1.2 \times 10^8 \text{ anos}$$

★ ★ ★

424. Uma nuvem esférica de H atômico tem raio $R = 100 \text{ pc}$, temperatura $T \simeq 100 \text{ K}$ e densidade $n = 1 \text{ cm}^{-3}$. (a) Qual é a massa da nuvem? (b) Qual é a massa de Jeans associada a esta nuvem? (c) Qual é o seu tempo de queda livre?

Solução:

$$(a) \rho = n_H m_H = (1) (1.67 \times 10^{-24}) \simeq 1.67 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \simeq 1.24 \times 10^{62} \text{ cm}^3$$

$$M \simeq \rho V \simeq 2.06 \times 10^{38} \text{ g} \simeq 1.04 \times 10^5 M_{\odot}$$

$$(b) M_J \simeq 1.2 \times 10^{-10} \frac{T^{3/2}}{\mu^{3/2} \rho^{1/2}} \simeq 9.3 \times 10^4 M_{\odot} = 1.9 \times 10^{38} \text{ g}$$

$$(c) t_{ql} \simeq \sqrt{\frac{3\pi}{32 G \rho}} \simeq 1.6 \times 10^{15} \text{ s} \simeq 5.2 \times 10^7 \text{ ano}$$

★ ★ ★

425. Considere o núcleo denso de uma nuvem molecular gigante de hidrogênio com temperatura $T = 10 \text{ K}$, e densidade $n_{H_2} = 10^4 \text{ cm}^{-3}$. (a) Qual seria a massa de Jeans desta nuvem? (b) Qual seria seu tempo de queda livre?

Solução:

(a) Com $\mu = 2$, temos

$$\rho \simeq 2 n_{H_2} m_H \simeq (2) (10^4) (1.67 \times 10^{-24}) \simeq 3.34 \times 10^{-20} \text{ g/cm}^3$$

$$M_J \simeq 1.2 \times 10^{-10} \frac{T^{3/2}}{\mu^{3/2} \rho^{1/2}} \simeq \frac{(1.2 \times 10^{-10}) (10^{3/2})}{(2^{3/2}) (3.34 \times 10^{-20})^{1/2}} \simeq 7.3 M_{\odot}$$

$$(b) t_{ql} \simeq \sqrt{\frac{3\pi}{32 G \rho}} \simeq 1.2 \times 10^{13} \text{ s} \simeq 3.8 \times 10^5 \text{ ano}$$

★ ★ ★

426. A nuvem de alta velocidade (HVC) conhecida como “Complexo C” é responsável por uma queda de matéria em nossa Galáxia da ordem de $0.2 M_{\odot}/\text{ano}$. (a) Supondo que este processo ocorreu nos últimos 10 Ganos, qual é a massa total depositada na Galáxia? (b) Considere que o gás acrescentado é usado para formar estrelas de $1 M_{\odot}$ e $10 M_{\odot}$, havendo cerca de 10 estrelas de $1 M_{\odot}$ para cada estrela de $10 M_{\odot}$. Quantas estrelas de cada tipo teriam sido formadas?

Solução:

$$(a) M = (0.2) (10) (10^9) = 2 \times 10^9 M_{\odot}$$

$$(b) M = n_1 M_1 + n_{10} M_{10} = n_1 M_1 + 10 n_{10} M_1 = (n_1 + 10 n_{10}) M_1$$

$$\frac{M}{M_1} = n_1 + 10 n_{10} = n_1 + n_1 = 2 n_1$$

$$n_1 = \frac{M}{2 M_1} = \frac{2 \times 10^9}{2 \times 1} = 10^9 \text{ estrelas com } 1 M_{\odot}$$

$$n_{10} = \frac{n_1}{10} = 10^8 \text{ estrelas com } 10 M_{\odot}$$

★ ★ ★

PARTE 5 - EVOLUÇÃO QUÍMICA

ABUNDÂNCIAS - COMPOSIÇÃO QUÍMICA

427. A tabela a seguir (Maciel 2020) dá as abundâncias na atmosfera solar dos elementos com $2 < Z < 92$, medidas com relação ao H, na forma $\epsilon(X) = \log n_X/n_H + 12$, onde n_X e n_H são abundâncias por número de átomos. Calcule a contribuição dos elementos C, N, O para a metalicidade Z . Adote os valores $Z \simeq 0.0134$ e $Z/X \simeq 0.0183$

Z		$\epsilon(Z)$	Z		$\epsilon(Z)$	Z		$\epsilon(Z)$
1	H	12.00	29	Cu	4.19	58	Ce	1.58
2	He	10.93*	30	Zn	4.56	59	Pr	0.72
3	Li	1.05	31	Ga	3.04	60	Nd	1.42
4	Be	1.38	32	Ge	3.65	62	Sm	0.96
5	B	2.70	33	As	2.30*	63	Eu	0.52
6	C	8.43	34	Se	3.34*	64	Gd	1.07
7	N	7.83	35	Br	2.54*	65	Tb	0.30
8	O	8.69	36	Kr	3.25*	66	Dy	1.10
9	F	4.56	37	Rb	2.52	67	Ho	0.48
10	Ne	7.93*	38	Sr	2.87	68	Er	0.92
11	Na	6.24	39	Y	2.21	69	Tm	0.10
12	Mg	7.60	40	Zr	2.58	70	Yb	0.84
13	Al	6.45	41	Nb	1.46	71	Lu	0.10
14	Si	7.51	42	Mo	1.88	72	Hf	0.85
15	P	5.41	44	Ru	1.75	73	Ta	-0.12*
16	S	7.12	45	Rh	0.91	74	W	0.85
17	Cl	5.50	46	Pd	1.57	75	Re	0.26*
18	Ar	6.40*	47	Ag	0.94	76	Os	1.40
19	K	5.03	48	Cd	1.71*	77	Ir	1.38
20	Ca	6.34	49	In	0.80	78	Pt	1.62*
21	Sc	3.15	50	Sn	2.04	79	Au	0.92
22	Ti	4.95	51	Sb	1.01*	80	Hg	1.17*
23	V	3.93	52	Te	2.18*	81	Tl	0.90
24	Cr	5.64	53	I	1.55*	82	Pb	1.75
25	Mn	5.43	54	Xe	2.24*	83	Bi	0.65*
26	Fe	7.50	55	Cs	1.08*	90	Th	0.02
27	Co	4.99	56	Ba	2.18	92	U	-0.54*
28	Ni	6.22	57	La	1.10			

Solução:

$$\epsilon(\text{C}) = 8.43 \quad A_{\text{C}} = 12.0110$$

$$\epsilon(\text{N}) = 7.83 \quad A_{\text{N}} = 14.0070$$

$$\epsilon(\text{O}) = 8.69 \quad A_{\text{O}} = 15.9990$$

$$n_{\text{C}}/n_{\text{H}} = 2.69 \times 10^{-4}$$

$$n_{\text{N}}/n_{\text{H}} = 6.76 \times 10^{-5}$$

$$n_{\text{O}}/n_{\text{H}} = 4.90 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon(\text{He}) = 10.93 \longrightarrow n_{\text{He}}/n_{\text{H}} = 8.51 \times 10^{-2}$$

Neste caso temos

$$\sum A_i n_i/n_{\text{H}} = Z/X = 0.0183$$

$$1 + 4 n_{\text{He}}/n_{\text{H}} + \sum A_i n_i/n_{\text{H}} = 1.3587$$

$$Z_{\text{C}} = \frac{A_{\text{C}} (n_{\text{C}}/n_{\text{H}})}{1 + 4 n_{\text{He}}/n_{\text{H}} + \sum A_i n_i/n_{\text{H}}} = 0.0024$$

$$Z_{\text{N}} = \frac{A_{\text{N}} (n_{\text{N}}/n_{\text{H}})}{1 + 4 n_{\text{He}}/n_{\text{H}} + \sum A_i n_i/n_{\text{H}}} = 0.0007$$

$$Z_{\text{O}} = \frac{A_{\text{O}} (n_{\text{O}}/n_{\text{H}})}{1 + 4 n_{\text{He}}/n_{\text{H}} + \sum A_i n_i/n_{\text{H}}} = 0.0058$$

$$\text{com } Z \simeq 0.0134$$

$$Z_{\text{C}}/Z \simeq 0.18$$

$$Z_{\text{N}}/Z \simeq 0.05$$

$$Z_{\text{O}}/Z \simeq 0.43$$

$$Z_{\text{CNO}} \simeq 0.0089 \simeq 0.66 Z \longrightarrow 66\%$$

★ ★ ★

428. Use os dados de abundâncias da tabela do exercício anterior e determine as abundâncias relativas de Ne e Ar relativas ao oxigênio, isto é, $n_{\text{Ne}}/n_{\text{O}}$ e $n_{\text{Ar}}/n_{\text{O}}$.

Solução:

$$\epsilon(\text{O}) = 8.69 \quad \epsilon(\text{Ne}) = 7.93 \quad \epsilon(\text{Ar}) = 6.40$$

$$n_{\text{Ne}}/n_{\text{O}} \simeq 10^{7.93-8.69} \simeq 10^{-0.76} \simeq 0.17 \longrightarrow \log n_{\text{Ne}}/n_{\text{O}} \simeq -0.77$$

$$n_{\text{Ar}}/n_{\text{O}} \simeq 10^{6.40-8.69} \simeq 10^{-2.29} \simeq 0.005 \longrightarrow \log n_{\text{Ar}}/n_{\text{O}} \simeq -2.3$$

★ ★ ★

429. Considere uma estrela de tipo solar com $X = 0.7200$ e $Y = 0.2500$. Qual é a abundância de elementos pesados Z desta estrela? Qual é sua razão Z/X ? Compare este resultado com o valor na fotosfera solar.

Solução:

Os valores solares e da estrela estão na tabela a seguir.

	solar	estrela
X	0.7381	0.7200
Y	0.2485	0.2500
Z	0.0134	0.0300
Z/X	0.0182	0.0417

temos para a estrela

$$X + Y + Z \simeq 1$$

$$Z = 1 - X - Y \simeq 1 - 0.7200 - 0.2500 \simeq 0.0300$$

$$Z/X \simeq 0.0417$$

$$\frac{Z/X}{(Z/X)_{\odot}} \simeq \frac{0.0417}{0.0182} \simeq 2.29 \longrightarrow 129\% \text{ maior que solar}$$

★ ★ ★

430. A fração de massa de He na zona de convecção solar é $Y = 0.2485$ e a dos elementos pesados é $Z = 0.0134$. Qual seria a abundância de He por número de átomos $\epsilon(\text{He}) = \log(n_{\text{He}}/n_{\text{H}}) + 12$ neste caso?

Solução:

$$Y = \frac{4(n_{\text{He}}/n_{\text{H}})}{1 + 4(n_{\text{He}}/n_{\text{H}}) + \sum A_i (n_i/n_{\text{H}})}$$

fazendo a substituição

$$x = n_{\text{He}}/n_{\text{H}} \quad \sigma = \sum A_i (n_i/n_{\text{H}})$$

$$4x = Y + 4xY + \sigma Y$$

$$4x(1 - Y) = Y(1 + \sigma)$$

$$x = \frac{Y(1 + \sigma)}{4(1 - Y)} \quad (1)$$

desprezando os elementos pesados, $\sigma \simeq 0$, temos

$$x \simeq \frac{Y}{4(1-Y)} \simeq \frac{0.2485}{4(1-0.2485)} \simeq 0.0827$$

$$\epsilon(\text{He}) \simeq \log 0.0827 + 12 \simeq 10.92$$

considerando agora o valor dado de σ , podemos usar a relação para Z

$$Z = \frac{\sum A_i (n_i/n_{\text{H}})}{1 + 4(n_{\text{He}}/n_{\text{H}}) + \sum A_i (n_i/n_{\text{H}})}$$

de modo que

$$\frac{Y}{Z} = \frac{4x}{\sigma}$$

$$\sigma = \frac{4xZ}{Y} \quad (2)$$

substituindo (2) em (1)

$$x = \frac{Y(1 + 4xZ/Y)}{4(1-Y)} = \frac{Y + 4xZ}{4(1-Y)}$$

$$4x(1-Y) = Y + 4xZ$$

$$4x(1-Y-Z) = Y$$

$$x \simeq \frac{Y}{4(1-Y-Z)} \simeq \frac{0.2485}{4(1-0.2485-0.0134)} \simeq 0.0842$$

$$\epsilon(\text{He}) + 12 \simeq \log 0.0842 \simeq 10.93$$

★ ★ ★

431. A abundância de Li no Sol é dada por $\epsilon(\text{Li}) = 1.05$, enquanto que nos meteoritos é de $\epsilon(\text{Li}) = 3.26$. Quantas vezes a abundância de Li nos meteoritos é maior que no Sol?

Solução:

$$\left. \frac{n_{\text{Li}}}{n_{\text{H}}} \right)_{\odot} = 10^{1.05-12} = 10^{-10.95} \simeq 1.12 \times 10^{-11}$$

$$\left. \frac{n_{\text{Li}}}{n_{\text{H}}} \right)_{\text{m}} = 10^{3.26-12} = 10^{-8.74} \simeq 1.82 \times 10^{-9}$$

$$r \simeq \frac{1.82 \times 10^{-9}}{1.12 \times 10^{-11}} \simeq 1.63$$

★ ★ ★

432. As abundâncias fotosféricas de oxigênio e ferro no Sol dadas na tabela do exercício anterior são $\epsilon(\text{O}) = 8.69$ e $\epsilon(\text{Fe}) = 7.50$, respectivamente. Admita uma

relação entre a abundância de elementos pesados por massa, Z , e as abundâncias de oxigênio e ferro por número de átomos, $n_{\text{O}}/n_{\text{H}}$ e $n_{\text{Fe}}/n_{\text{H}}$ na forma:

$$Z = K_{\text{O}} \frac{n_{\text{O}}}{n_{\text{H}}} \quad Z = K_{\text{Fe}} \frac{n_{\text{Fe}}}{n_{\text{H}}}$$

Determine as constantes K_{O} e K_{Fe} para a atmosfera solar.

Solução:

$$n_{\text{O}}/n_{\text{H}} = 10^{-3.31} = 4.90 \times 10^{-4}$$

$$n_{\text{Fe}}/n_{\text{H}} = 10^{-4.5} = 3.16 \times 10^{-5}$$

considerando $Z \simeq 0.0134$

$$K_{\text{O}} = \frac{Z}{[n_{\text{O}}/n_{\text{H}}]} \simeq 27.3$$

$$K_{\text{Fe}} = \frac{Z}{[n_{\text{Fe}}/n_{\text{H}}]} \simeq 424$$

★ ★ ★

433. Considere que a porcentagem de átomos de H na fotosfera solar é de aproximadamente 91.2%, e a porcentagem de átomos de Fe é de 0.003%. Qual seria o valor da abundância de Fe relativa ao H, $\epsilon(\text{Fe})$ na fotosfera solar?

Solução:

n : número total de átomos por centímetro cúbico na fotosfera

$$\epsilon(\text{Fe}) = \log \frac{n_{\text{Fe}}}{n_{\text{H}}} + 12 = \log \left[\frac{n_{\text{Fe}}/n}{n_{\text{H}}/n} \right] + 12$$

$$\epsilon(\text{Fe}) \simeq \log \left[\frac{0.003}{91.2} \right] + 12 \simeq \log(3.29 \times 10^{-5}) + 12 \simeq 7.52$$

★ ★ ★

434. Estrelas cuja razão $\text{O/C} = n_{\text{O}}/n_{\text{C}} > 1$ são geralmente chamadas “estrelas oxigenadas”, enquanto que as estrelas com a razão $\text{O/C} < 1$ são chamadas “estrelas carbonadas”. Use os dados da tabela do Exercício 427, e verifique que tipo de estrela é o Sol.

Solução:

$$\epsilon(\text{O}) = 8.69 \quad \epsilon(\text{C}) = 8.43$$

$$\text{O/C} = \frac{n_{\text{O}}}{n_{\text{C}}} = 10^{8.69-8.43} = 10^{0.26} \simeq 1.82 \longrightarrow \text{oxigenada}$$

★ ★ ★

435. A estrela HD 230409 está localizada a uma distância galactocêntrica $R = 6.39$ kpc, e sua velocidade de rotação galáctica é de aproximadamente $\Theta = 80$ km/s. Estime a quantidade de movimento angular por unidade de massa desta estrela em unidades de 100 kpc km/s. Compare seu resultado com o valor solar, adotando $\Theta_{\odot} = 180$ km/s e $R_{\odot} = 7.6$. Considerando que a metalicidade da estrela é $[\text{Fe}/\text{H}] = -0.81$, que conclusões pode tirar sobre a variação da quantidade de movimento com a metalicidade?

Solução:

A quantidade de movimento por unidade de massa é

$$h \simeq \Theta R \simeq (80) (6.39) \simeq 511 \text{ kpc km/s} \simeq 5.1 (100 \text{ kpc km/s})$$

$$h_{\odot} \simeq \Theta_{\odot} R_{\odot} \simeq (180) (7.6) \simeq 1368 \text{ kpc km/s} \simeq 13.7 (100 \text{ kpc km/s})$$

Como $[\text{Fe}/\text{H}] = -0.81$ e $[\text{Fe}/\text{H}]_{\odot} = 0$, a quantidade de movimento é proporcional à metalicidade

★ ★ ★

436. Mostre que, para um elemento químico qualquer X, podemos escrever:

$$[\text{X}/\text{H}] = [\text{X}/\text{Fe}] + [\text{Fe}/\text{H}]$$

Solução:

$$[\text{X}/\text{H}] = \log(\text{X}/\text{H}) - \log(\text{X}/\text{H})_{\odot}$$

$$[\text{X}/\text{Fe}] = \log(\text{X}/\text{Fe}) - \log(\text{X}/\text{Fe})_{\odot}$$

$$[\text{Fe}/\text{H}] = \log(\text{Fe}/\text{H}) - \log(\text{Fe}/\text{H})_{\odot}$$

$$[\text{X}/\text{H}] = [\log(\text{X}/\text{Fe}) + \log(\text{Fe}/\text{H})] - [\log(\text{X}/\text{Fe})_{\odot} + \log(\text{Fe}/\text{H})_{\odot}]$$

$$[\text{X}/\text{H}] = [\log(\text{X}/\text{Fe}) - \log(\text{X}/\text{Fe})_{\odot}] + [\log(\text{Fe}/\text{H}) - \log(\text{Fe}/\text{H})_{\odot}]$$

$$[\text{X}/\text{H}] = [\text{X}/\text{Fe}] + [\text{Fe}/\text{H}]$$

★ ★ ★

437. Estrelas muito pobres em metais refletem a composição química em uma época mais primitiva da evolução do universo. A estrela pobre em metais HE 1327-2326 tem abundância de Fe (NLTE) dada por $[\text{Fe}/\text{H}] = -5.16 \pm 0.12$. Seus parâmetros estelares estimados são $T_{ef} = 6130$ K e $\log g = 3.7$. Qual é sua abundância de Fe por número de átomos $\epsilon(\text{Fe})$? Compare as razões de abundâncias $n_{\text{Fe}}/n_{\text{H}}$ entre esta estrela e a fotosfera solar.

Solução:

$$[\text{Fe}/\text{H}] = \epsilon(\text{Fe}) - \epsilon(\text{Fe})_{\odot}$$

$$\epsilon(\text{Fe}) = \epsilon(\text{Fe})_{\odot} + [\text{Fe}/\text{H}] = 7.50 - 5.16 = 2.34$$

$$\log(n_{\text{Fe}}/n_{\text{H}}) = \epsilon(\text{Fe}) - 12 = 2.34 - 12 = -9.66$$

$$(n_{\text{Fe}}/n_{\text{H}}) = 2.19 \times 10^{-10}$$

$$\log(n_{\text{Fe}}/n_{\text{H}})_{\odot} = 7.5 - 12 = -4.5$$

$$(n_{\text{Fe}}/n_{\text{H}})_{\odot} = 3.16 \times 10^{-5}$$

$$\frac{(n_{\text{Fe}}/n_{\text{H}})}{(n_{\text{Fe}}/n_{\text{H}})_{\odot}} \simeq 6.93 \times 10^{-6}$$

$$\frac{(n_{\text{Fe}}/n_{\text{H}})_{\odot}}{(n_{\text{Fe}}/n_{\text{H}})} \simeq 1.44 \times 10^5$$

★ ★ ★

438. A metalicidade $[\text{Fe}/\text{H}]$ é inversamente proporcional ao excesso de ultravioleta $\delta(\text{U}-\text{B})$, uma vez que os metais atuam como absorvedores da radiação. Uma relação aproximada entre estas quantidades pode ser escrita como

$$\delta(\text{U} - \text{B}) \simeq -0.0377 [\text{Fe}/\text{H}]^3 - 0.1626 [\text{Fe}/\text{H}]^2 - 0.3020 [\text{Fe}/\text{H}] + 0.0122$$

válida para $0.4 < \text{B} - \text{V} < 0.8$. (a) Faça um gráfico do excesso de ultravioleta em função da metalicidade. (b) O Sol tem $\text{B} - \text{V} \simeq 0.65$, e metalicidade $[\text{Fe}/\text{H}] = 0$, enquanto que a estrela HIP 19814 tem $\text{B} - \text{V} \simeq 0.58$, e metalicidade $[\text{Fe}/\text{H}] = -0.70$. Quais seriam os valores esperados para o excesso de cor em cada caso? Indique estes objetos no gráfico.

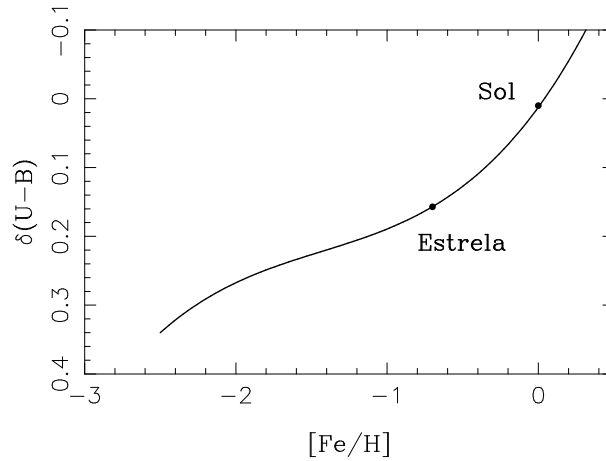
Solução:

(a) O gráfico está na figura a seguir

(b) Com os valores dados, temos

$$\delta(\text{U} - \text{B}) \simeq 0.01 \text{ para o Sol}$$

$$\delta(\text{U} - \text{B}) \simeq 0.15 \text{ para a estrela.}$$



★ ★ ★

439. As abundâncias protosolares de N e O, $\epsilon(\text{N})$ e $\epsilon(\text{O})$, são dadas nas colunas 2 e 3 da tabela a seguir, incluindo também uma região HII e uma nebulosa planetária. Que conclusões você pode tirar sobre as abundâncias destes objetos?

	N	O	N/O
protosolar	7.87	8.73	-0.86
HII	7.85	8.75	-0.90
NP	8.55	8.70	-0.15

Solução:

Na última coluna estão as razões N/O para os 3 casos. As abundâncias de O (metallicidades) são semelhantes à do Sol. A região II tem abundância de N próxima da do Sol, e $\text{N/O} = -0.90$, comparável à razão solar, $\text{N/O} = -0.86$. A nebulosa planetária tem uma abundância superior à do Sol, $\epsilon(\text{N}) \gg \epsilon(\text{N})_{\odot}$, e razão $\text{N/O} = -0.15$, ou seja, a estrela progenitora da planetária teve uma produção adicional de N

★ ★ ★

440. A tabela a seguir mostra valores médios da abundância de N e O (em ppM) na Nebulosa de Orion, no Sol, e na nebulosa planetária NGC 7027 (Stasińska 2000). (a) Determine em cada caso as abundâncias logarítmicas, definidas por $\epsilon(X) = \log(n_X/n_H) + 12$. (b) Determine a razão N/O para os 3 objetos da tabela. Comparando os resultados, o que você pode concluir sobre a nucleossíntese do nitrogênio?

	N	O
Orion	62	360
Sol	93	576
NGC 7027	224	552

Solução:

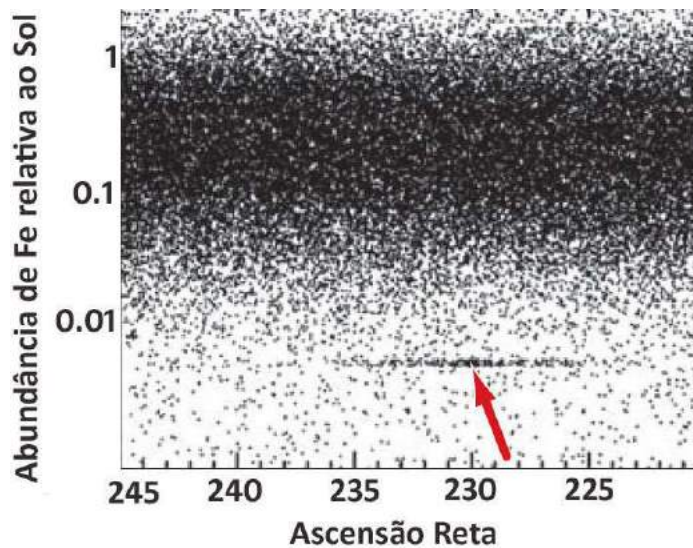
- (a) Os resultados estão nas colunas 2, 3 da tabela a seguir
- (b) Os resultados estão nas colunas 4, 5 da tabela a seguir

	$\epsilon(\text{N})$	$\epsilon(\text{O})$	N/O	$\log(\text{N/O})$
Orion	7.79	8.56	0.17	-0.77
Sol	7.97	8.76	0.16	-0.79
NGC 7027	8.35	8.74	0.41	-0.39

As razões N/O para o Sol e Orion representam os valores originais.
 Para NGC 7027 houve enriquecimento de N

★ ★ ★

441. A figura a seguir (adaptada de Ibata e Gibson 2007) mostra a abundância de ferro relativa ao Sol $(\text{Fe}/\text{H})/(\text{Fe}/\text{H})_{\odot}$ para um grande número de estrelas da Galáxia observadas entre a ascensão reta $\alpha = 220^{\circ}$ e $\alpha = 245^{\circ}$. Nesta figura há um grupo de estrelas, conhecido como “Corrente de Palomar 5”, que se destaca com relação às demais estrelas. Este grupo tem massa estimada em $5000 M_{\odot}$, e sua provável origem é o aglomerado globular Palomar 5, tendo sido incorporado à nossa Galáxia. Qual é a metalicidade deste grupo, medida pelo parâmetro de metalicidade $[\text{Fe}/\text{H}] = \log(\text{Fe}/\text{H}) - \log(\text{Fe}/\text{H})_{\odot}$? Suas estrelas devem ser jovens ou velhas?



Solução:

Da figura temos

$$\frac{\text{Fe}/\text{H}}{(\text{Fe}/\text{H})_{\odot}} \simeq 0.007$$

$$[\text{Fe}/\text{H}] \simeq \log 0.007 \simeq -2.15$$

com esta baixa metalicidade as estrelas devem ser velhas

★ ★ ★

NUCLEOSSÍNTESE

442. Resultados observacionais da nucleossíntese do Big Bang sugerem um valor para a razão de bárions sobre fótons $\eta \simeq 6.1 \times 10^{-10}$. Qual é a densidade bariônica (g/cm^3) correspondente a este valor? Compare seu resultado com determinações recentes da densidade, $\rho_B^* \simeq 4 - 5 \times 10^{-31} \text{ g}/\text{cm}^3$.

Solução:

A relação entre a densidade bariônica (g/cm^3) e o parâmetro η pode ser escrita

$$\rho_B \simeq 6.6 \times 10^{-22} \eta (T/2.7)^3$$

para $T \simeq 2.7 \text{ K}$

$$\rho_B \simeq (6.6 \times 10^{-22}) (6.1 \times 10^{-10}) \simeq 4.0 \times 10^{-31} \text{ g}/\text{cm}^3$$

$$\frac{\rho_B}{\rho_B^*} \simeq 0.8 - 1.0$$

★ ★ ★

443. Nos primeiros instantes do Universo, durante a época dominada pela radiação, a relação entre a idade t e a densidade de energia da radiação ρ_R era da forma

$$\frac{32\pi G}{3} \rho_R t^2 \simeq 1 \quad (1)$$

(a) Mostre que isto implica uma relação entre a idade t e a temperatura da radiação cósmica de fundo T_γ da forma

$$t T_\gamma^2 \simeq \text{constante} \quad (2)$$

(b) Na época anterior à aniquilação pósitron-elétron a relação $t(T_\gamma)$ era aproximadamente

$$t T_\gamma^2 \simeq 0.738 \text{ MeV}^2 \text{ s} \quad (3)$$

Qual seria a temperatura (em K) quando a idade do Universo era de 10 s?

Solução:

(a) Da relação (1)

$$\rho_R t^2 \simeq \text{constante}$$

mas

$$\rho_R \propto T_\gamma^4$$

$$T_\gamma^4 t^2 \simeq \text{constante}$$

$$t T_\gamma^2 \simeq \text{constante}$$

que é a relação (2)

(b) da relação (3)

$$T_\gamma^2 \simeq \frac{0.738}{10} \text{ MeV}^2 \simeq 0.0738 \text{ MeV}^2$$

$$T_\gamma \simeq 0.27 \text{ MeV}$$

$$T_\gamma \simeq \frac{(0.27)(10^6)(1.6 \times 10^{-12})}{1.38 \times 10^{-16}} \simeq 3.1 \times 10^9 \text{ K}$$

★ ★ ★

444. (a) Qual é o valor da densidade crítica ρ_c , supondo que a constante de Hubble está no intervalo

$$50 < H_0 \text{ (km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}) < 100$$

Expresse seu resultado em g/cm^3 , átomos de H por cm^3 e átomos de H por m^3 .

(b) Compare seu resultado com algumas densidades astrofísicas típicas, como a densidade média do Sol, a densidade das nuvens interestelares, e a densidade média do meio intergaláctico.

Solução:

(a) A densidade crítica pode ser escrita

$$\rho_c \simeq \frac{3 H_0^2}{8 \pi G}$$

com os valores de H_0 do intervalo acima, temos

$$4.7 \times 10^{-30} < \rho_c \text{ (g/cm}^3\text{)} < 1.9 \times 10^{-29}$$

$$2.8 \times 10^{-6} < \rho_c \text{ (H/cm}^3\text{)} < 1.14 \times 10^{-5}$$

$$2.8 < \rho_c \text{ (H/m}^3\text{)} < 11.4$$

(b) Tomando $\rho_c \simeq 10^{-29} \text{ g/cm}^3$, e adotando

$$\rho_\odot \simeq 1.4 \text{ g/cm}^3$$

$$n_{ni} \simeq 10 \text{ cm}^{-3} \longrightarrow \rho_{ni} \simeq n_{ni} m_H \simeq (10) (10^{-24}) \simeq 10^{-23}$$

$$n_{mig} \simeq 10^{-3} \text{ cm}^{-3} \longrightarrow \rho_{mig} \simeq n_{mig} m_H \simeq (10^{-3}) (10^{-24}) \simeq 10^{-27}$$

portanto

$$\rho_c \ll \rho_\odot, \quad \rho_{ni} \gg \rho_c \quad \rho_{mig} > \rho_c$$

★ ★ ★

445. Mostre que $1 \text{ Gano}^{-1} = 980 \text{ km/(s Mpc)}$

Solução:

$$980 \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} = \left(980 \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} \right) \left(10^5 \frac{\text{cm}}{\text{km}} \right) \left(\frac{3.156 \times 10^{16} \text{ s}}{\text{Gano}} \right) \left(\frac{\text{Mpc}}{3.086 \times 10^{24} \text{ cm}} \right)$$

$$980 \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} = \frac{(980) (10^5) (3.156 \times 10^{16})}{3.086 \times 10^{24}} \simeq 1.0 \text{ Gano}^{-1}$$

★ ★ ★

446. No processo de expansão do Universo, as partículas constituintes têm suas abundâncias congeladas quando a taxa de interações fracas fica abaixo da taxa de expansão. Suponha que isto ocorre em energias da ordem de 0.8 MeV, características das interações- β que controlam as abundâncias relativas de nêutrons e prótons. Qual seria a temperatura do Universo nesta época?

Solução:

$$E \simeq k T$$

$$T \simeq \frac{E}{k} \simeq \frac{(0.8) (10^6) (1.6 \times 10^{-12})}{1.38 \times 10^{-16}} \simeq 9 \times 10^9 \text{ K}$$

★ ★ ★

447. No processo de formação de nêutrons após o Big Bang, uma vez estabelecido o equilíbrio térmico, a razão entre nêutrons e prótons é dada por

$$\frac{n_n}{n_p} \simeq e^{-(m_n - m_p)c^2/kT}$$

(a) Estime esta razão para $T \simeq 10^{10}$ K. (b) Mostre que esta equação pode ser escrita na forma

$$\frac{n_n}{n_p} \simeq e^{-Q/T(\text{MeV})}$$

onde $Q = 1.30$ MeV é a diferença de massa entre nêutrons e prótons.

Solução:

(a) Da equação dada, com $m_p = 1.007276$ uma e $m_n = 1.008665$ uma (uma = 1.660540×10^{-24} g) obtemos

$$n_n/n_p \simeq 1/5$$

(b) Podemos admitir válida a relação

$$\frac{n_n}{n_p} \simeq e^{-Q/T(\text{MeV})}$$

desde que

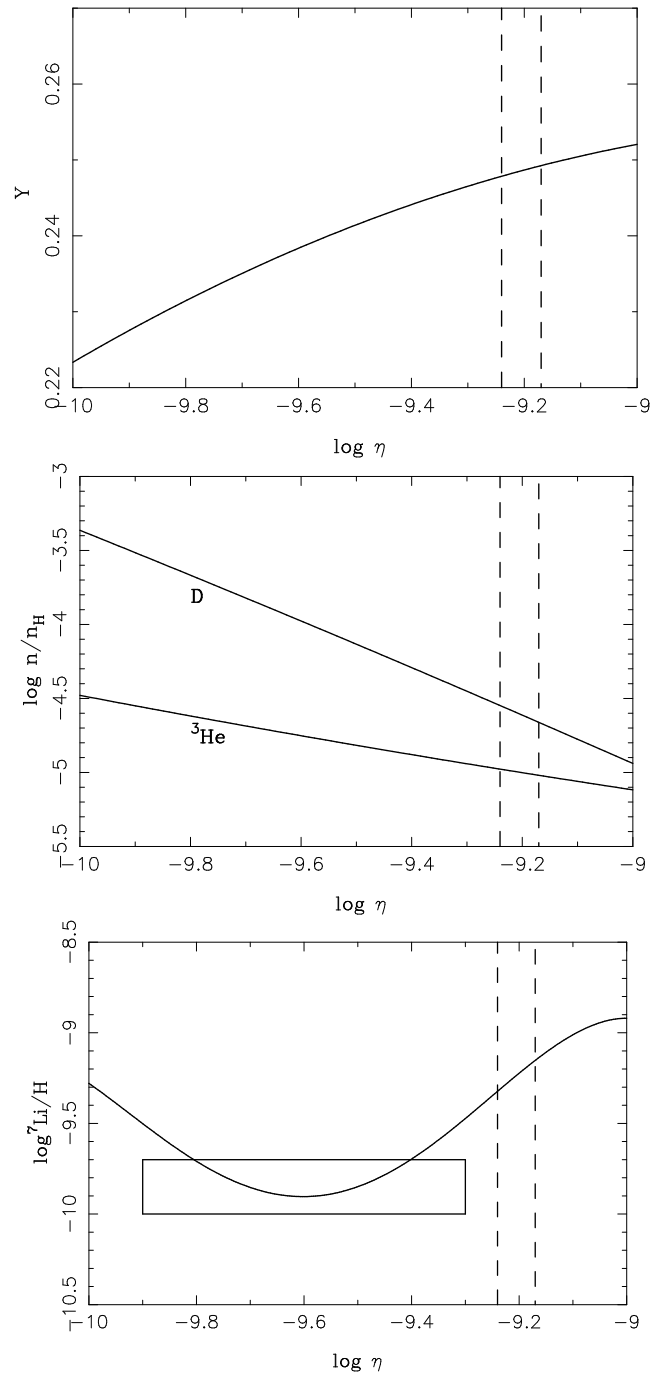
$$\frac{(m_n - m_p)c^2}{kT(\text{K})} \simeq \frac{Q}{T(\text{MeV})}$$

ou seja

$$Q \simeq (m_n - m_p)c^2 \frac{T(\text{MeV})}{kT(\text{K})} \simeq \frac{(m_n - m_p)c^2}{1.602 \times 10^{-6}} \simeq 1.30 \text{ MeV}$$

★ ★ ★

448. A figura a seguir (Maciel 2020, cap. 2) mostra os resultados da nucleossíntese primordial para os isótopos ^4He , D, ^3He e ^7Li , em função da razão η entre bárions e fótons. Considerando que resultados observacionais sugerem um valor de $\eta \simeq 6 \times 10^{-10}$ (linhas tracejadas verticais), (a) Qual seria a abundância primordial de ^4He por massa Y_p ? (b) Qual seria a abundância de ^4He correspondente por número de átomos, isto é, $n(\text{He})/n(\text{H})$?



Solução:

(a) Da figura $Y_p \simeq 0.25$

$$(b) Y_p = \frac{n_{He} m_{He}}{n_H m_H + n_{He} m_{He} + \sum n_m m_m}$$

em primeira aproximação, desprezando os elementos pesados

$$Y_p \simeq \frac{4 n_{He} m_H}{n_H m_H + 4 n_{He} m_H} \simeq \frac{4 (n_{He}/n_H)}{1 + 4 (n_{He}/n_H)}$$

$$\frac{n_{He}}{n_H} \simeq \frac{Y_p}{4(1 - Y_p)} \simeq 0.08$$

considerando os elementos pesados

$$\frac{n_{He}}{n_H} = \frac{Y_p [1 + \langle A n_m / n_H \rangle]}{4(1 - Y_p)}$$

por exemplo, com $\langle A n_m / n_H \rangle \simeq 0.1$ obtemos $n_{He}/n_H \simeq 0.09$

★ ★ ★

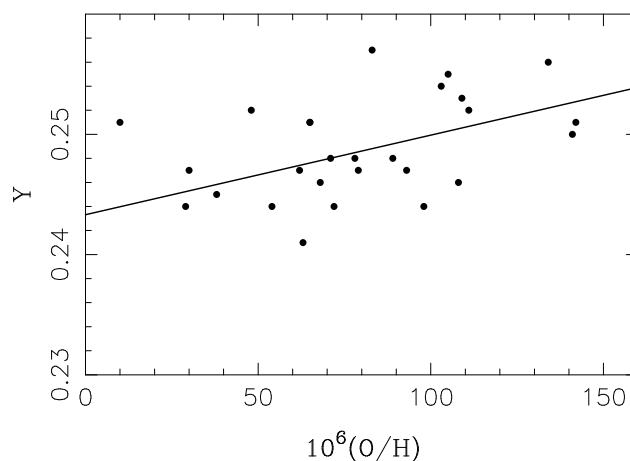
449. As galáxias compactas azuis (BCG, de *Blue Compact Galaxies*) estão entre os objetos com a menor metalicidade, de modo que podem ser utilizadas com sucesso para a determinação da abundância primordial de He por massa (Y_p). A tabela abaixo relaciona abundâncias de He por massa e abundâncias de oxigênio por número de átomos $O/H = n_O/n_H$ para um conjunto de regiões HII em BGCs. (a) Faça um gráfico de Y em função de O/H . (b) A partir dos dados da tabela estime a abundância pregaláctica de He. (c) Estime a razão de enriquecimento entre o He e os elementos pesados, $\Delta Y / \Delta Z$. (d) Qual seria o valor correspondente da razão de bárions sobre fótons η ? (e) Onde estaria localizado o Sol no gráfico? A relação obtida é válida para a metalicidade solar?

Objeto $10^6 (O/H)$			Y	Objeto $10^6 (O/H)$			Y
01	78		0.248	15	71		0.248
02	72		0.244	16	29		0.244
03	111		0.252	17	62		0.247
04	38		0.245	18	48		0.252
05	79		0.247	19	98		0.244
06	89		0.248	20	65		0.251
07	30		0.247	21	108		0.246
08	109		0.253	22	134		0.256
09	10		0.251	23	141		0.250
10	68		0.246	24	65		0.251
11	103		0.254	25	93		0.247
12	54		0.244	26	83		0.257
13	63		0.241	27	142		0.251
14	105		0.255				

Solução:

(a) O gráfico está a seguir.

(b) Fazendo uma regressão simples obtemos



$$Y = Y_p + \alpha (O/H)$$

onde

$$Y_p = 0.243 \pm 0.002$$

$$\alpha = \frac{\Delta Y}{\Delta(O/H)} = 66.25$$

$$(c) \frac{\Delta Y}{\Delta(O/H)} = \frac{\Delta Y}{\Delta Z} \frac{\Delta Z}{\Delta(O/H)}$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta Z} \simeq \frac{\Delta Y / \Delta(O/H)}{Z / (O/H)}$$

adotando $Z/(O/H) \simeq 23$ temos $\Delta Y / \Delta Z \simeq 2.9$

adotando $Z/(O/H) \simeq 25$ temos $\Delta Y / \Delta Z \simeq 2.7$

adotando $Z/(O/H) \simeq 30$ temos $\Delta Y / \Delta Z \simeq 2.2$

(ver Exercício 432).

(d) Com $Y_p \simeq 0.243$ usando por exemplo a figura do Exercício 448 temos aproximadamente $10^{10}\eta \simeq 4.0$.

(e) Para o Sol, $Y \simeq 0.26$ e $10^6(O/H) \simeq 500$. O Sol estaria fora da escala, mas a relação obtida é aproximadamente válida.

★ ★ ★

450. A maior parte das determinações da abundância pregaláctica de He medida por massa está no intervalo

$$0.23 < Y_P < 0.25$$

Qual é o intervalo correspondente para a abundância pregaláctica de He por número de átomos, $n_{\text{He}}/n_{\text{H}}$?

Solução:

A abundância de hélio por massa Y pode ser escrita

$$Y = \frac{4(n_{\text{He}}/n_{\text{H}})}{1 + 4(n_{\text{He}}/n_{\text{H}}) + \sum A_i (n_i/n_{\text{H}})} \simeq \frac{4(n_{\text{He}}/n_{\text{H}})}{1 + 4(n_{\text{He}}/n_{\text{H}})}$$

de modo que

$$n_{\text{He}}/n_{\text{H}} \simeq \frac{Y_p}{4(1 - Y_p)}$$

portanto

$$0.075 < n_{\text{He}}/n_{\text{H}} < 0.083$$

★ ★ ★

451. A abundância primordial de ^2H é da ordem de 10^{-5} , enquanto que a abundância de ^4He é da ordem de 10^{-1} . Apesar disto, o ^2H é um barômetro melhor que o ^4He . Por que isto ocorre?

Solução:

O ^2H varia fortemente com a razão de bárions sobre fótons, enquanto que o ^4He tem uma variação logarítmica, mais lenta. (ver por exemplo a figura do Exercício 448).

★ ★ ★

452. As abundâncias de ^7Li em estrelas de baixa metalicidade, com $[\text{Fe}/\text{H}] \leq -2$, têm valores médios $\epsilon(\text{Li}) \simeq 2.2$. Previsões da nucleossíntese do modelo padrão do Big Bang indicam $\epsilon(\text{Li}) \simeq 2.65$ (cf. Exercício 448). Qual é a razão média entre as abundâncias previstas e as observadas?

Solução:

A razão r pode ser estimada por

$$r \simeq \frac{(\text{Li}/\text{H})_t}{(\text{Li}/\text{H})_o} \simeq \frac{10^{\epsilon_t - 12}}{10^{\epsilon_o - 12}} \simeq \frac{4.47 \times 10^{-10}}{1.58 \times 10^{-10}}$$

$$r \simeq 2.8$$

★ ★ ★

453. Na formação de ^{12}C pelo processo triplo- α , a massa do ^8Be é maior que a massa dos dois núcleos de ^4He . A energia necessária para a reação ocorrer é de 91.8 keV. Qual é a diferença entre as massas dos núcleos envolvidos na reação?

Solução:

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} \simeq \frac{(91.8)(10^3)(1.602 \times 10^{-12})}{(2.998 \times 10^{10})^2}$$

$$\Delta M \simeq 1.64 \times 10^{-28} \text{ g}$$

★ ★ ★

454. Considere a ejeção de ^{16}O pelas supernovas de tipo II adotando uma produção média de ^{16}O de $3 M_{\odot}$ por estrela e supondo uma taxa de uma supernova a cada 100 anos durante 10 Ganos. (a) Qual seria a abundância de ^{16}O por massa devida a esse processo, $Z(\text{O})$? Considere a massa total da Galáxia como $M_G \simeq 10^{11} M_{\odot}$. (b) Compare seu resultado com o valor de $Z(\text{O})$ obtido a partir da abundância solar $\epsilon(\text{O}) = 8.69$.

Solução:

$$(a) M_{\text{O}} \simeq (3)(10^{10})(10^{-2}) \simeq 3 \times 10^8$$

$$Z_{\text{O}} \simeq \frac{M_{\text{O}}}{M_G} \simeq \frac{3 \times 10^8}{10^{11}} \simeq 3 \times 10^{-3} \simeq 0.003$$

$$(b) \epsilon(\text{O}) = 8.69 \longrightarrow n_{\text{O}}/n_{\text{H}} \simeq 4.9 \times 10^{-4}$$

$$Z'(\text{O}) \simeq \frac{16 n_{\text{O}}/n_{\text{H}}}{1.4} \simeq \frac{(16)(4.9 \times 10^{-4})}{1.4} \simeq 0.0056$$

★ ★ ★

455. Admita que 65% da abundância de Fe no Sistema Solar foram produzidos por supernovas de tipo Ia, e 35% pelas supernovas de tipo II. Qual é a abundância relativa que foi produzida pelas supernovas de tipo II medida por número de átomos, $n_{\text{Fe}}/n_{\text{H}}$?

Solução:

Da tabela do Exercício 427

$$\epsilon(\text{Fe}) = 7.5$$

$$\frac{n_{\text{Fe}}}{n_{\text{H}}} = 10^{7.5-12} = 10^{-4.5} \simeq 3.16 \times 10^{-5}$$

$$\text{Ia} : 65\% \rightarrow \frac{n_{\text{Fe}}}{n_{\text{H}}} = (0.65)(3.16 \times 10^{-5}) \simeq 2.05 \times 10^{-5}$$

$$\text{II} : 35\% \rightarrow \frac{n_{\text{Fe}}}{n_{\text{H}}} = (0.35)(3.16 \times 10^{-5}) \simeq 1.11 \times 10^{-5}$$

★ ★ ★

456. Considere que o B é formado pela interação de prótons cósmicos com núcleos de CNO interestelares. A seção de choque para este processo é $\sigma \simeq 6.5 \times 10^{-26}$

cm^2 e a abundância de CNO é $n_{\text{CNO}}/n_{\text{H}} \simeq 10^{-3}$. Suponha que todos os átomos formados permanecem no meio interestelar. Qual deve ser o fluxo de prótons para reproduzir a abundância “cósmica”, de B, $\epsilon(\text{B}) = 2.7$?

Solução:

A taxa de formação de B por este processo pode ser escrita

$$\frac{d(n_{\text{B}}/n_{\text{H}})}{dt} \simeq F \sigma \frac{n_{\text{CNO}}}{n_{\text{H}}} P$$

onde $n_{\text{B}}/n_{\text{H}}$ é a abundância de B relativa ao H, F é o fluxo de raios cósmicos, σ é a seção de choque de espalação, $n_{\text{CNO}}/n_{\text{H}}$ é a abundância de CNO, e P é a probabilidade que o elemento produzido permaneça no meio interestelar.

Neste caso temos

$$\frac{d(n_{\text{B}}/n_{\text{H}})}{dt} \simeq (6.5 \times 10^{-26}) (10^{-3}) (1) F$$

$$\frac{d(n_{\text{B}}/n_{\text{H}})}{dt} \simeq 6.5 \times 10^{-29} F$$

podemos estimar $n_{\text{B}}/n_{\text{H}}$ por

$$\frac{n_{\text{B}}}{n_{\text{H}}} \simeq \frac{d(n_{\text{B}}/n_{\text{H}})}{dt} T_{\text{G}} \simeq (6.5 \times 10^{-29}) (3 \times 10^{17}) F \simeq 2.0 \times 10^{-11} F$$

onde $T_{\text{G}} \simeq 10^{10}$ anos $\simeq 3 \times 10^7$ s é a idade da Galáxia.

considerando a abundância cósmica de B, $\epsilon(\text{B}) = 2.7$ obtemos

$$\frac{n_{\text{B}}}{n_{\text{H}}} = 10^{2.7-12} \simeq 5.0 \times 10^{-10}$$

de modo que

$$F = \frac{5.0 \times 10^{-10}}{2.0 \times 10^{-11}} = 25 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

★ ★ ★

457. O espectro observado dos raios cósmicos sugere uma diminuição exponencial do fluxo para energias no intervalo entre cerca de 10^{10} eV e 10^{20} eV, com um “joelho” em uma energia de cerca de 10^{15} eV, onde o fluxo é aproximadamente $\log F \simeq -13.5$, dado em número de partículas $\text{m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ GeV}^{-1}$. Use esses dados mostre que o fluxo corresponde a cerca de uma partícula por m^2 por ano.

Solução:

Com $\log F \simeq -13.5$ temos

$$F \simeq 10^{-13.5} \simeq 3.2 \times 10^{-14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ GeV}^{-1}$$

o fluxo f em partículas $\text{m}^{-2} \text{ano}^{-1}$ pode ser escrito

$$f \simeq F E$$

$$f \simeq \frac{3.2 \times 10^{-14}}{\text{m}^2 \text{sr GeV}} 10^{15} \text{eV} \frac{\text{GeV}}{10^9 \text{eV}} \frac{3.16 \times 10^7 \text{s}}{\text{ano}}$$

$$\text{ou seja } f \simeq 1 \text{ partícula } \text{m}^{-2} \text{ano}^{-1} \text{sr}^{-1}$$

★ ★ ★

458. Um próton cósmico pode alcançar energias da ordem de 10^{14}MeV . Mostre que esta energia corresponde à energia cinética de uma bola de tênis de massa 50 g viajando a 90 km/h.

Solução:

$$E_p = 10^{14} \text{MeV} = (10^{14}) (10^6) (1.60 \times 10^{-12}) = 1.6 \times 10^8 \text{erg}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2 E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.6 \times 10^8}{50}} = 2.5 \times 10^3 \text{cm/s} \simeq 90 \text{km/h}$$

★ ★ ★

459. Considere um próton cósmico com energia cinética da ordem de 10^{20}eV . Mostre que este próton move-se praticamente com a velocidade da luz.

Solução:

$$E_c = m c^2 - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2$$

$$E_c = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right]$$

$$\frac{E_c}{m_0 c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1$$

simplificando

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0 c^2}{E_c + m_0 c^2}$$

com o resultado

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{E_c + m_0 c^2} \right)^2}$$

com os valores dados

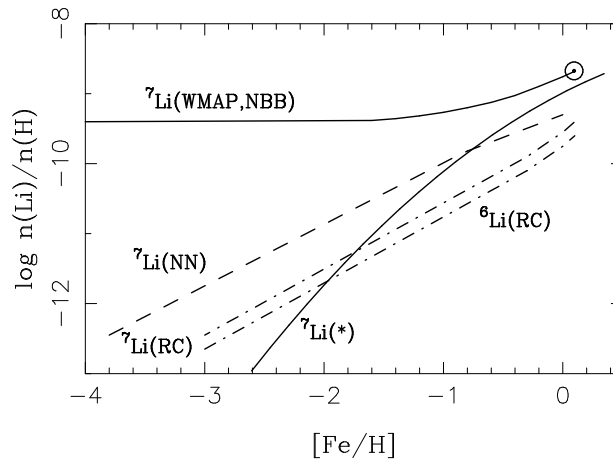
$$m_0 = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}, \quad c = 3 \times 10^{10} \text{ cm/s}$$

$$E_c = 10^{20} \text{ eV} = (10^{20}) (1.6 \times 10^{-12}) = 1.6 \times 10^8 \text{ erg}$$

temos $v \simeq c$

★ ★ ★

460. A figura abaixo mostra uma estimativa da ação das diferentes fontes galácticas de Li em função da metalicidade $[\text{Fe}/\text{H}]$, incluindo a abundância total de Li (linha sólida superior, WMAP, NBB), e as contribuições para a formação de ${}^7\text{Li}$ e ${}^6\text{Li}$ pelos raios cósmicos galácticos (RC), a formação de ${}^7\text{Li}$ nas estrelas (asterisco) e pela nucleossíntese induzida por neutrinos (NN). Com base nestes resultados, qual seria a contribuição da nucleossíntese do Big Bang (NBB) para a formação de Li para $[\text{Fe}/\text{H}] = 0.0$?



Solução:

Com base na figura, o valor total das contribuições corresponde a $\log n_{\text{Li}}/n_{\text{H}} \simeq -8.60$. Para os 4 componentes [estrelas, NN, ${}^7\text{Li}(\text{RC})$, ${}^6\text{Li}(\text{RC})$] temos os resultados da tabela abaixo

	$\log n_{\text{Li}}/n_{\text{H}}$	$n_{\text{Li}}/n_{\text{H}}$	fração
Total	-8.60	2.51×10^{-9}	1.00
estrelas	-8.96	1.10×10^{-9}	0.44
NN	-9.36	4.37×10^{-10}	0.17
${}^7\text{Li}(\text{RC})$	-9.60	2.51×10^{-10}	0.10
${}^6\text{Li}(\text{RC})$	-9.80	1.58×10^{-10}	0.06

portanto, a contribuição de NBB é

$$1.00 - (0.44 + 0.17 + 0.10 + 0.06) \simeq 0.23, \text{ ou } 23\%$$

★ ★ ★

461. As estrelas pobres em metais G64-12 e HD19445 tem abundâncias $[\text{Fe}/\text{H}] = -3.45$ e -2.10 , $\epsilon(\text{Be}) = -1.43$ e -0.48 , respectivamente. Observa-se uma correlação entre as abundâncias de Be/H e $[\text{Fe}/\text{H}]$ dada por

$$\log \frac{n_{\text{Be}}}{n_{\text{H}}} \simeq A + B [\text{Fe}/\text{H}]$$

onde $A = -10.6$ e $B = 1.0$ para elementos primários e $B \simeq 2.0$ para uma produção secundária. Com base nesta correlação, pode-se concluir se o Be é primário ou secundário?

Solução:

Podemos escrever para a abundância de Be

$$\log(n_{\text{Be}}/n_{\text{H}}) = \epsilon(\text{Be}) - 12$$

temos então

$$\log(n_{\text{Be}}/n_{\text{H}}) = -1.43 - 12 = -13.43 \text{ (G64 - 12)}$$

$$\log(n_{\text{Be}}/n_{\text{H}}) = -0.48 - 12 = -12.48 \text{ (HD19445)}$$

Os valores previstos de $\log(n_{\text{Be}}/n_{\text{H}})$ pela correlação são -14.05 e -12.70 para elementos primários e -17.50 e -14.80 para produção secundária, portanto as estrelas se ajustam melhor à correlação dos elementos primários.

★ ★ ★

PROPRIEDADES DAS ESTRELAS

462. Mostre que o tempo de vida médio de uma estrela de massa m e luminosidade L na sequência principal pode ser escrito na forma

$$t \simeq 1.0 \times 10^{10} \frac{m/M_{\odot}}{L/L_{\odot}} \text{ anos}$$

Solução:

Adotando como primeira aproximação a escala de tempo par a cadeia pp

$$t \simeq \frac{\Delta m c^2}{4 m_p} \frac{\alpha m}{L}$$

onde

Δm : Diferença de massa entre 4 prótons e um núcleo de ${}^4\text{He}$

$$\Delta m = 4 m_p - m_{\text{He}} = [(4) (1.0078) - (4.0026)] (1.66 \times 10^{-24})$$

$$\Delta m \simeq 4.75 \times 10^{-26} \text{ g}$$

correspondendo à energia

$$\Delta m c^2 \simeq 4.27 \times 10^{-5} \text{ erg}$$

α : fração da massa da estrela que pode sofrer reações nucleares

adotando $\alpha \simeq 0.10$

obtemos

$$t \simeq \frac{(4.27 \times 10^{-5}) (0.10) (1.99 \times 10^{33})}{(4) (1.67 \times 10^{-24}) (3.85 \times 10^{33})} \frac{m/M_{\odot}}{L/L_{\odot}} \text{ s}$$

$$t \simeq 3.30 \times 10^{17} \frac{m/M_{\odot}}{L/L_{\odot}} \text{ s} \simeq 1.0 \times 10^{10} \frac{m/M_{\odot}}{L/L_{\odot}} \text{ anos}$$

★ ★ ★

463. Considere a solução do exercício anterior, em que a escala de tempo na sequência principal é

$$t \propto \frac{m}{L}$$

Admita que a luminosidade está relacionada com a massa da estrela na forma $L \propto m^{3.5}$. Como ficaria a relação entre a escala de tempo t e a massa da estrela?

Solução:

$$\text{Se } t \propto \frac{m}{L} \text{ e } L \propto m^{\alpha}$$

temos

$$t \propto \frac{m}{m^{\alpha}} = m^{1-\alpha}$$

$$\log t = \text{constante} + (1 - \alpha) \log m$$

$$\text{com } \alpha = 3.5$$

$$t \propto m^{-2.5}$$

$$\log t = \text{constante} - 2.5 \log m$$

★ ★ ★

464. A tabela a seguir relaciona massas e escalas de tempo das estrelas na sequência principal. Obtenha um ajuste polinomial de segunda ordem da forma

$$\log t_{sp} = a + b \log m + c (\log m)^2$$

onde t_{sp} está em anos e m em massas solares. Compare as constantes a , b , c determinadas com valores mais precisos determinados por Bahcall e Piran (1983), que são $a = 10.03$, $b = -3.56$ e $c = 1.0$.

$m(M_{\odot})$	t_{sp} (Gano)
120	0.0030
60	0.0035
40	0.0044
20	0.0082
12	0.016
7	0.043
5	0.094
3	0.35
2	1.2
1.5	2.7
1.0	10.0
0.9	15.5
0.8	25

Solução:

Um ajuste polinomial produz os resultados

$$\log t_{sp} = 10.03 - 3.56 \log m + 0.90 (\log m)^2$$

$$\frac{a}{a_{BP}} \simeq \frac{10.03}{10.03} \simeq 1.00$$

$$\frac{b}{b_{BP}} \simeq \frac{3.56}{3.56} \simeq 1.00$$

$$\frac{c}{c_{BP}} \simeq \frac{0.90}{1.00} \simeq 0.90$$

a razão entre as escalas de tempo está no intervalo

$$\frac{\log t_{sp}}{\log t_{BP}} \simeq 0.9 \text{ a } 1.1$$

★ ★ ★

465. A relação entre a escala de tempo das estrelas na sequência principal e sua massa tem diversas aproximações, como

$$\log t \simeq 10.0 - 2.5 \log m \quad (1)$$

ou a a relação de Bahcall & Piran (1983)

$$\log t \simeq 10.0 - 3.6 \log m + (\log m)^2 \quad (2)$$

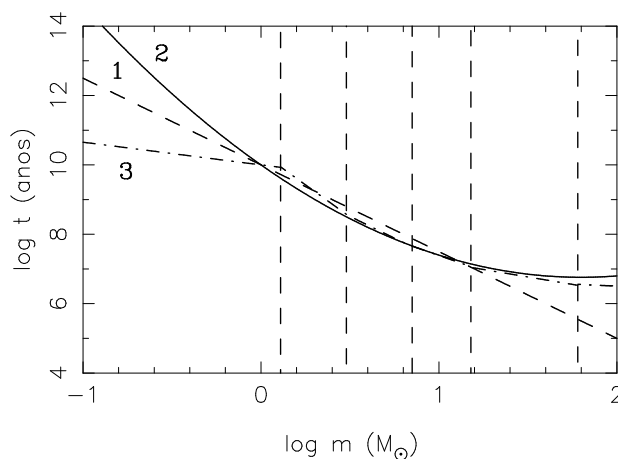
Em (1) e (2) t está em anos e m em massas solares. Uma terceira aproximação é dada por Romano et al. (2005)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \log t = -0.6545 \log m + 1 & (m \leq 1.3) \\ \log t = -3.7 \log m + 1.35 & (1.3 < m \leq 3) \\ \log t = -2.51 \log m + 0.77 & (3 < m \leq 7) \\ \log t = -1.78 \log m + 0.17 & (7 < m \leq 15) \\ \log t = -0.86 \log m - 0.94 & (15 < m \leq 60) \\ t = 1.2 m^{-1.85} + 0.003 & (m > 60) \end{array} \right. \quad (3)$$

onde t está em Gano e m em $M_{\odot}$. Calcule o tempo de vida para estrelas no intervalo de massa $0.1 \leq m(M_{\odot}) \leq 100$ usando as 3 formulações acima e faça um gráfico de $\log t(\text{anos})$ em função de $\log m$ em $M_{\odot}$. Considerando as formulações (2) e (3) para que massas ocorrem as maiores discrepâncias? Quais seriam as razões para isso?

Solução:

O gráfico está a seguir. As maiores incertezas ocorrem para para $m < 1 M_{\odot}$ e $M > 2.5 M_{\odot}$. As incertezas para $m < 1 M_{\odot}$ devem-se principalmente às baixas luminosidades das estrelas. Para $m > 25 M_{\odot}$ as extrapolações são inadequadas. Outras causas seriam: binaridade, heterogeneidade da composição química, inadequação dos modelos, rotação e convecção.



★ ★ ★

466. A tabela a seguir (Maciel 1999, cap. 1) mostra valores médios da magnitude absoluta visual M_v , luminosidade $\log(L/L_{\odot})$ e massa m em $M_{\odot}$ para um conjunto

de estrelas da sequência principal. (a) Obtenha correlações entre estas quantidades na forma

$$\log(L/L_{\odot}) = a + b M_v$$

$$\log(m/M_{\odot}) = c + d M_v$$

(b) A partir destas duas correlações obtenha uma terceira correlação entre a luminosidade e a massa e mostre que $L \propto m^{\alpha}$. Qual é o valor de α ? Faça gráficos mostrando as correlações obtidas. (c) Use diretamente os dados da tabela e estime um novo valor para a constante α .

Sp	M_v	$\log(L/L_{\odot})$	$m/M_{\odot}$
O3	-6.0	6.15	120.0
O5	-5.7	5.90	60.0
O6	-5.5	5.62	37.0
O8	-4.9	5.23	23.0
B0	-4.0	4.72	17.5
B3	-1.6	3.28	7.6
B5	-1.2	2.92	5.9
B8	-0.2	2.26	3.8
A0	0.6	1.73	2.9
A5	1.9	1.15	2.0
F0	2.7	0.81	1.6
F5	3.5	0.51	1.4
G0	4.4	0.18	1.1
G5	5.1	-0.10	0.9
K0	5.9	-0.38	0.8
K5	7.4	-0.82	0.7
M0	8.8	-1.11	0.5
M2	9.9	-1.35	0.4
M5	12.3	-1.96	0.2
M6	13.5	-2.28	0.1

Solução:

(a) Aplicando as correlações aos dados da tabela temos

$$a = 2.662, \quad b = -0.443$$

$$c = 0.751, \quad d = -0.135$$

com estes valores é fácil ver que

$$\log(L/L_{\odot}) = e + f \log(m/M_{\odot})$$

onde

$$e = a - \frac{bc}{d} \simeq 0.198$$

$$f = \frac{b}{d} \simeq 3.281$$

de modo que

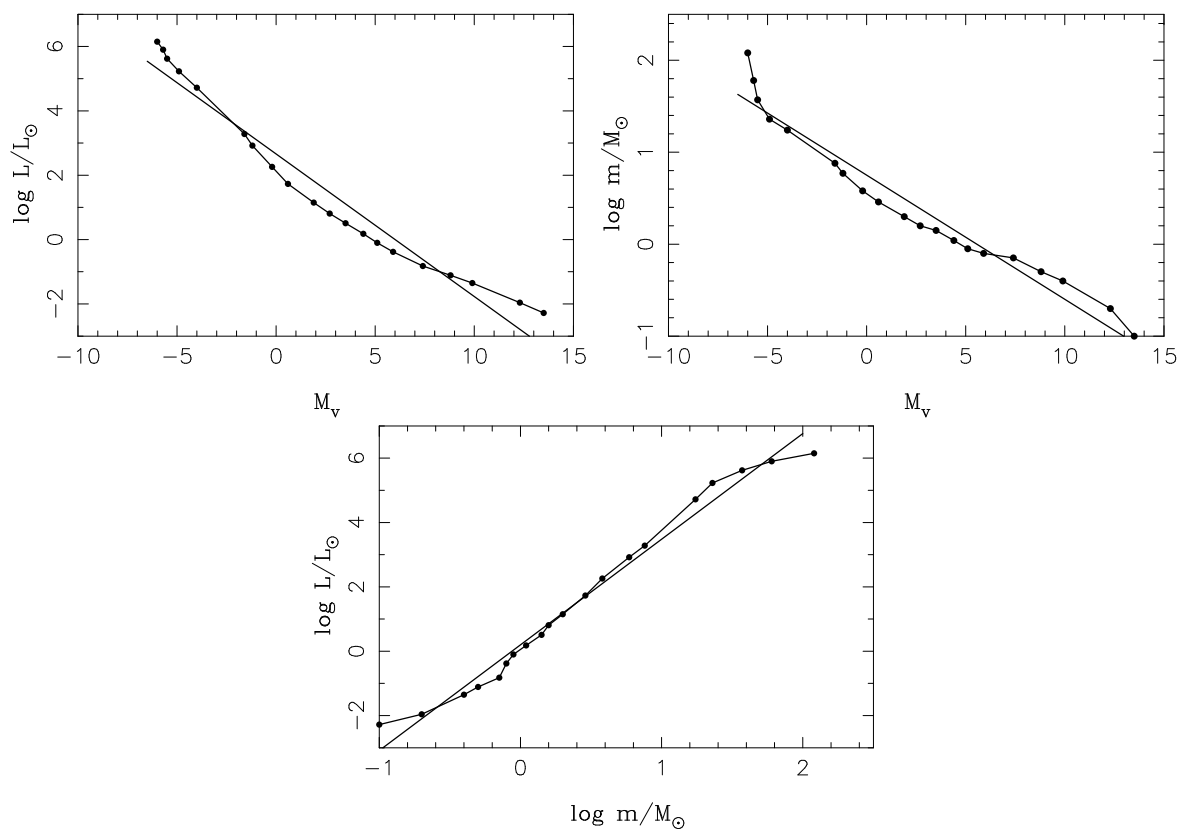
$$L \propto m^{3.28} \quad \alpha \simeq 3.28$$

(b) Usando diretamente os dados da tabela obtemos

$$e' \simeq 0.210, \quad f' \simeq 3.244$$

de modo que

$$L \propto m^{3.244} \quad \alpha' \simeq 3.24$$



★ ★ ★

467. Uma estrela da sequência principal com tipo espectral A0 tem $M_v = 0.65$ e $BC = -0.30$. (a) Estime sua luminosidade, $\log(L/L_{\odot})$. (b) A mesma estrela tem $T_{ef} = 9790$ K e $R = 2.4 R_{\odot}$. Estime sua luminosidade a partir destes dados. (c) Compare os resultados anteriores com o valor dado na tabela do exercício anterior.

Solução:

(a) Neste caso, $M_{bol} = M_v + BC = 0.35$

$$M_{bol} - M_{bol}^{\odot} = -2.5 \log(L/L_{\odot})$$

$$\log(L/L_{\odot}) = 0.4 (M_{bol} - M_{bol}^{\odot}) \simeq 1.76$$

$$\frac{L}{L_{\odot}} \simeq 57.0$$

(b) $L = 4 \pi R^2 \sigma T_{ef}^4$

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \frac{4 \pi R^2 \sigma T_{ef}^4}{L_{\odot}} \simeq 47.4$$

$$\log(L/L_{\odot}) \simeq 1.68$$

(c) Da tabela temos

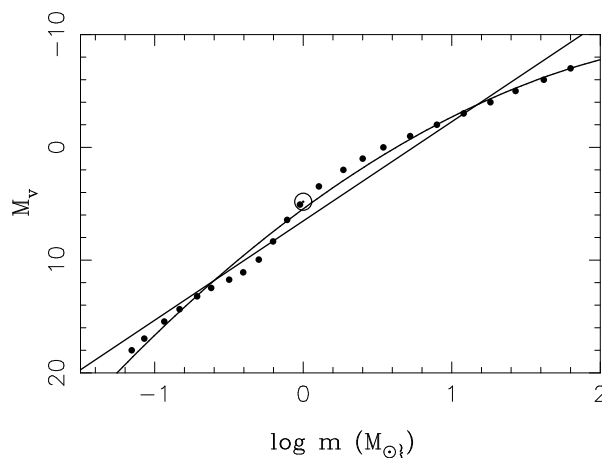
$$\log L/L_{\odot} \simeq 1.73$$

$$\frac{L}{L_{\odot}} \simeq 53.7$$

★ ★ ★

468. A tabela abaixo mostra valores da magnitude absoluta visual M_v e da massa m para estrelas da sequência principal (Cox 2000, p. 489). Faça um gráfico de M_v em função de $\log m$ e obtenha ajustes de primeira e segunda ordem para esta função. Onde estaria o Sol neste gráfico?

M_v	$m(M_{\odot})$	M_v	$m(M_{\odot})$
18.00	0.070	3.46	1.274
16.96	0.085	2.00	1.862
15.45	0.116	1.00	2.512
14.36	0.147	0.00	3.467
13.21	0.193	-1.00	5.248
12.47	0.240	-2.00	7.943
11.73	0.317	-3.00	12.023
11.08	0.394	-4.00	18.197
9.96	0.502	-5.00	26.915
8.35	0.626	-6.00	41.687
6.43	0.780	-7.00	63.100
5.08	0.950		

Solução:

O gráfico está na figura acima. Os ajustes são

$$M_v = a + b \log m + c (\log m)^2$$

onde m está em massas solares e

$$a = 6.532, b = -8.799 \text{ e } c = 0 \quad (\text{caso linear})$$

$$a = 5.457, b = -9.676 \text{ e } c = 1.530 \quad (\text{caso quadrático})$$

O ajuste de segunda ordem é razoável para as massas muito pequenas ou muito grandes, e pior para as massas intermediárias.

A posição do Sol está assinalada, adotando $\log m = 0$. e $M_v = 4.82$.

★ ★ ★

469. Uma aproximação para a relação massa-luminosidade de estrelas de pequena massa $0.1 \leq m(M_\odot) \leq 1.0$ pode ser escrita na forma

$$M_v = k_1 + k_2 \log m + k_3 (\log m)^2$$

onde $k_1 = 4.78$, $k_2 = -10.19$ e $k_3 = 2.34$, e m está em massas solares. As estrelas A, B, C, D têm valores de massa e magnitude absoluta visual dados na tabela abaixo. (a) Faça um gráfico de $\log m \times M_v$, inclua a relação aproximada e estas estrelas. Em que intervalo de massas a aproximação é melhor? (b) Admita que a relação entre a luminosidade e a magnitude absoluta seja exatamente a mesma do Exercício 466. Neste caso podemos escrever que $L \propto m^\alpha$? Qual seria o valor do expoente α ?

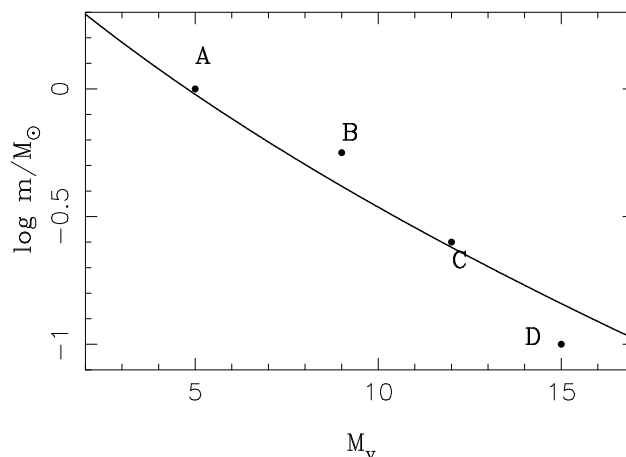
	A	B	C	D
M_v	5.0	9.0	12.0	15.0
$\log m$	0.0	-0.25	-0.60	-1.0

Solução:

(a) O ajuste e as estrelas A, B, C, D estão na figura a seguir. As estrelas A e C têm um bom ajuste, enquanto que as estrelas B e D apresentam maiores desvios. A relação parece se ajustar melhor aos intervalos

$$\log m > -0.2 \rightarrow m > 0.6M_{\odot}$$

$$-0.8 < \log m < -0.5 \rightarrow 0.16 < m/M_{\odot} < 0.32$$



(b) Usando a relação do Exercício 466 temos

$$\log(L/L_{\odot}) = a + b[k_1 + k_2 \log m + k_3 (\log m)^2]$$

$$\log(L/L_{\odot}) = (a + b k_1) + (b k_2) \log m + (b k_3) (\log m)^2$$

No Exercício 466, com uma variação linear entre $\log(L/L_{\odot})$ e $\log(m/M_{\odot})$, o expoente α é simplesmente

$$\alpha = \frac{d \log(L/L_{\odot})}{d \log(m/M_{\odot})} = f \simeq 3.28$$

no presente caso, temos

$$\alpha = \frac{d \log(L/L_{\odot})}{d \log(m/M_{\odot})} = (b k_2) + (2 b k_3) \log m$$

com os valores numéricos temos

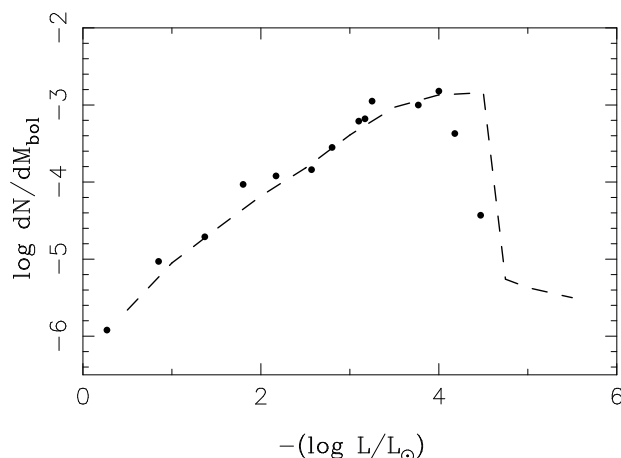
$$\alpha = 4.514 - 2.073 \log(m/M_{\odot})$$

portanto o parâmetro α não é mais uma constante, variando de $\alpha \simeq 6.59$ para $\log m = -1$ a $\alpha \simeq 4.51$ para $\log m = 0$.

★ ★ ★

470. A função de luminosidade das estrelas anãs brancas pode ser usada para estimar a idade do disco galáctico. As anãs brancas mais quentes e luminosas

resfriam-se mais rapidamente que as mais frias, de modo que sua densidade espacial deve aumentar à medida que a luminosidade das estrelas diminui. Por outro lado, para estrelas com luminosidades muito baixas, os tempos de resfriamento são muito longos, eventualmente da ordem ou maiores que a idade da Galáxia, de modo que a função de luminosidade deve cair abruptamente quando os dois tempos forem iguais. Considere a função luminosidade dada na figura abaixo (Cowan et al. 1991), e estime a idade do disco.



Solução:

Da figura pode-se estimar que a luminosidade onde ocorre a queda abrupta é de aproximadamente $\log(L_d/L_{\odot}) \simeq -5$, ou $L_d/L_{\odot} \simeq 10^{-5}$.

Usando por exemplo a relação de Iben & Laughlin (1989)

$$t(\text{Gano}) \simeq 9 \left[\frac{10^{-4.7}}{L_d/L_{\odot}} \right]^{0.28}$$

obtemos

$$t \simeq 9 \left[\frac{10^{-4.7}}{10^{-5}} \right]^{0.28} \simeq 10.9 \text{ Gano} \simeq 1.09 \times 10^{10} \text{ ano}$$

★ ★ ★

IMF - SFR - AMR

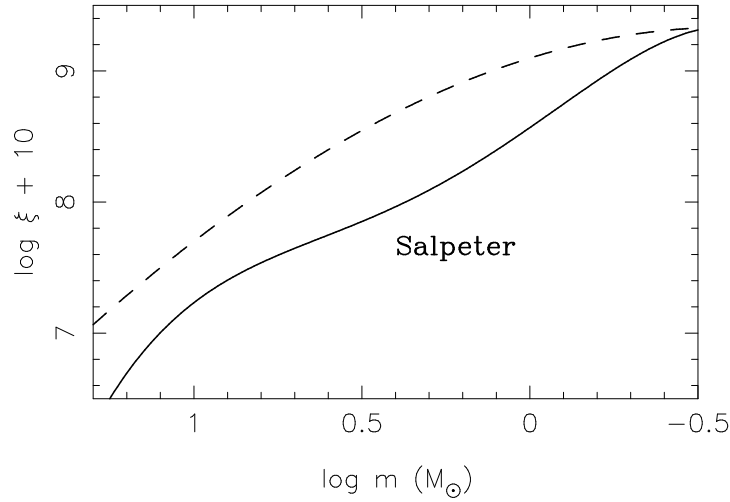
471. Considere a IMF de Salpeter (1955) mostrada na figura abaixo, e dada por

$$\xi(m) = m \phi(m) = K m^{-1.35}$$

Suponha que a “constante” K seja dada por meio da solução analítica de Miller e Scalo (1979), de modo que

$$K = 0.383 m^{1.35} \exp \left[-1.09 \left(\log m + 1.02 \right)^2 \right]$$

onde m está em massas solares. Calcule a IMF na forma $\xi(m)$ e inclua seu resultado no gráfico. Considere o intervalo de massas $15 > m(M_{\odot}) > 0.4$.



Solução:

Com a relação de Miller e Scalo, obtemos os resultados da tabela a seguir

$\log m(M_{\odot})$	$m(M_{\odot})$	K	$\log \xi + 10$
1.2	15.8	0.074	7.25
1.0	10.0	0.100	7.65
0.8	6.3	0.125	8.02
0.6	4.0	0.142	8.34
0.4	2.5	0.147	8.63
0.2	1.6	0.141	8.88
0.0	1.0	0.123	9.09
-0.2	0.6	0.099	9.27
-0.4	0.4	0.073	9.40

★ ★ ★

472. Suponha que a IMF seja dada pela aproximação de Salpeter (1955)

$$\phi(m) \simeq K m^{-2.35}$$

(a) Use a constante K obtida com os limites $m_i = 0.1 M_{\odot}$ e $m_f = 100 M_{\odot}$ e determine a fração de massa de estrelas que formam nebulosas planetárias, admitindo que o intervalo de estrelas de massa intermediária que podem dar origem a essas

nebulosas seja de 0.8 a $8 M_{\odot}$. (b) Repita o cálculo anterior usando a constante original obtida por Salpeter, $K \simeq 0.03$.

Solução:

(a) Com a condição de normalização podemos escrever

$$I = \int_{m_i}^{m_f} m \phi(m) dm = 1$$

$$I = \int m (K m^{-2.35}) dm = K \int m^{-1.35} dm$$

$$I = K \left[\frac{m^{-0.35}}{-0.35} \right]_{0.1}^{100} = -\frac{K}{0.35} \left[\frac{1}{100^{0.35}} - \frac{1}{0.1^{0.35}} \right]$$

$$I = \frac{K}{0.35} \left[\frac{1}{0.1^{0.35}} - \frac{1}{100^{0.35}} \right] = \frac{2.04}{0.35} K$$

$$K \simeq 0.17$$

$$f = \int_{0.8}^8 m \phi(m) dm = \frac{K}{0.35} \left[\frac{1}{0.8^{0.35}} - \frac{1}{8^{0.35}} \right] = \frac{0.60}{0.35} K$$

$$f \simeq 0.29 \rightarrow 29\%$$

(b) $K \simeq 0.03$

$$f = \frac{0.60 K}{0.35} = \frac{0.60 \times 0.03}{0.35}$$

$$f \simeq 0.05 \rightarrow 5\%$$

★ ★ ★

473. A IMF de Salpeter pode ser escrita na forma

$$\xi(\log m) d \log m = C \frac{dm}{m^{2.35}}$$

onde m está em massas solares. (a) Mostre que esta IMF pode ser colocada na forma

$$\xi(\log m) = C M^{\Gamma}$$

onde Γ é uma constante. Qual é o valor de Γ ? (b) Use esta IMF e calcule a fração de estrelas formadas na Galáxia com massas acima de $8 M_{\odot}$. Considere os limites observados das massas estelares dados por $m_i = 0.07 M_{\odot}$ e $m_s = 150 M_{\odot}$. (c) Qual é a fração de massa total contida nas estrelas? (d) Qual é a fração de massa total contida nas estrelas que formam nebulosas planetárias, considerando que para estas estrelas $1 \leq m(M_{\odot}) \leq 8$?

Solução:

$$(a) \xi(\log m) \frac{dm}{m} = C \frac{dm}{m^{2.35}}$$

$$\xi(\log m) = C m^{-1.35}$$

$$\xi(\log m) = C m^{\Gamma} \longrightarrow \Gamma = -1.35$$

$$\begin{aligned} (b) N(> 8) &= \frac{\int_m^{m_s} \frac{dm}{m^{1-\Gamma}}}{\int_{m_i}^{m_s} \frac{dm}{m^{1-\Gamma}}} = \frac{m_s^{\Gamma} - m_i^{\Gamma}}{m_s^{\Gamma} - m_i^{\Gamma}} \\ &= \frac{150^{-1.35} - 8^{-1.35}}{150^{-1.35} - 0.07^{-1.35}} = \frac{-5.922 \times 10^{-2}}{-3.623 \times 10^1} \end{aligned}$$

$$N(> 8) = 1.635 \times 10^{-3}$$

$$\begin{aligned} (c) F(> 8) &= \frac{\int_m^{m_s} \frac{m dm}{m^{1-\Gamma}}}{\int_{m_i}^{m_s} \frac{m dm}{m^{1-\Gamma}}} = \frac{m_s^{\Gamma+1} - m_i^{\Gamma+1}}{m_s^{\Gamma+1} - m_i^{\Gamma+1}} \\ &= \frac{150^{-0.35} - 8^{-0.35}}{150^{-0.35} - 0.07^{-0.35}} = \frac{-3.098 \times 10^{-1}}{-2.363} = 0.131 \longrightarrow 13\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) F(1 < m < 8) &= \frac{\int_1^8 \frac{m dm}{m^{1-\Gamma}}}{\int_{m_i}^{m_s} \frac{m dm}{m^{1-\Gamma}}} = \frac{8^{\Gamma+1} - 1^{\Gamma+1}}{150^{\Gamma+1} - 0.07^{\Gamma+1}} \\ &= \frac{-0.517}{-2.363} = 0.219 \longrightarrow 22\% \end{aligned}$$

★ ★ ★

474. Considere a IMF definida por intervalo logarítmico de massa na forma

$$\xi(\log m) = \frac{dN}{d \log m} \propto m^{-\Gamma} \quad (1)$$

e a IMF definida por intervalo de massa na forma $\phi(m)$

$$\phi(m) = \frac{dN}{dm} \propto m^{-\alpha} \quad (2)$$

$$(a) \text{ Mostre que } \phi(m) = \frac{1}{m \ln 10} \xi(\log m)$$

$$(b) \text{ Mostre que } \alpha = 2.35 \text{ para } \Gamma = 1.35$$

Solução:

(a) Temos

$$\log m = \frac{\ln m}{\ln 10} \quad (3)$$

De (1) e (3)

$$\frac{dN}{d \log m} = \frac{dN}{d \ln m} \ln 10 = \frac{dN}{dm} m \ln 10 \quad (4)$$

De (1), (2) e (4)

$$\phi(m) = \frac{1}{m \ln 10} \xi(\log m) \quad (5)$$

que é a relação procurada

(b) De (1), (2) e (5)

$$m^{-\alpha} \propto \frac{m^{-\Gamma}}{m} \propto m^{-(\Gamma+1)}$$

$$\alpha = \Gamma + 1, \quad \longrightarrow \quad \alpha = 2.35 \text{ para } \Gamma = 1.35$$

★ ★ ★

475. Considere a IMF de Maciel e Rocha-Pinto (1998) na forma

$$\log \xi(\log m) = \sum_{n=0}^6 a_n (\log m)^n$$

Com os coeficientes dados na tabela abaixo

n	a_n
0	1.557462
1	-0.879337
2	-0.574181
3	-0.311909
4	-0.186031
5	0.562851
6	-0.186622

Supondo que esta IMF possa ser representada por uma lei de potências, qual seria o expoente Γ correspondente para $m = 1 M_{\odot}$ e $m = 10 m_{\odot}$?

Solução:

Neste caso podemos escrever

$$\xi = K m^{-\Gamma}$$

$$\log \xi = \log K - \Gamma \log m$$

$$-\Gamma(m) = \frac{d \log \xi(\log m)}{d \log m}$$

$$-\Gamma(m) = \sum_{n=0}^6 n a_n (\log m)^{n-1} = a_1 + 2 a_2 \log m + 3 a_3 (\log m)^2 \\ + 4 a_4 (\log m)^3 + 5 a_5 (\log m)^4 + 6 a_6 (\log m)^5$$

$$\Gamma(1) \simeq a_1 \simeq 0.88$$

$$\Gamma(10) \simeq a_1 + 2 a_2 + 3 a_3 + 4 a_4 + 5 a_5 + 6 a_6 \simeq 2.01$$

★ ★ ★

476. Considere a IMF definida por

$$\chi(m) = \frac{dN}{dm} \propto m^{-\alpha}$$

onde $\alpha = \Gamma + 1$. Admita que o índice Γ tenha uma variação com a massa das estrelas dada pela tabela abaixo para os pontos A, B, C, D.

	$\log m$	Γ
A	-1.00	-0.50
B	-0.40	0.40
C	0.00	1.35
D	1.00	1.35

(a) Determine o valor da IMF para os 4 pontos A, B, C, D. Para calibrar a IMF use a IMF das Hyades, mostrada na figura a seguir considerando o valor máximo, que corresponde aproximadamente a $\log m = -0.4$. (b) Inclua seus resultados para os 4 pontos na figura.

Solução:

$$\chi(m) = \frac{dN}{dm} \propto m^{-(\Gamma+1)}$$

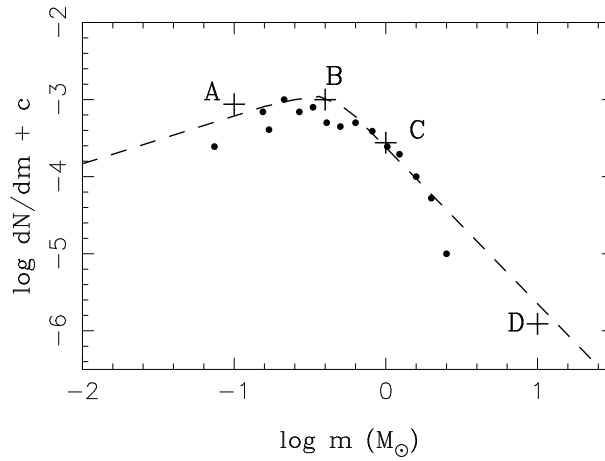
fazendo

$$y = \log(dN/dm) + \text{constante} = -(\Gamma + 1) \log m$$

$$y_H(-0.4) \simeq -3.00$$

$$y_c = y + \text{constante}$$

$$\text{constante} = y_c - y = (-3.00) - (0.56) = -3.56$$



os resultados estão na tabela a seguir, incluídos na figura

	$\log m$	m	Γ	$-(\Gamma + 1)$	y	y_c
A	-1.0	0.1	-0.5	-0.5	0.50	-3.06
B	-0.4	0.4	0.4	-1.4	0.56	-3.00
C	0.0	1.0	1.35	-2.35	0.00	-3.56
D	1.0	10.0	1.35	-2.35	-2.35	-5.91

★ ★ ★

477. Para uma SFR como a de Schmidt (1959), Miller e Scalo (1979) obtiveram a relação

$$b(t) = b(0) \left(1 + \frac{t}{t_1 \tau}\right)^{-2}$$

onde $b(0) = [(1 - P) \tau]^{-1}$ e $\tau = P/(1 - P)$, sendo $P \simeq 0.1$ a razão atual entre a massa interestelar (gás + poeira) e a massa total na vizinhança solar. Mostre que esta relação satisfaz a condição de normalização dada por

$$\int_0^{t_1} b(t) dt = t_1$$

Solução:

$$I = \int_0^{t_1} b(t) dt = \int_0^{t_1} b(0) \left[1 + \frac{t}{t_1 \tau}\right]^{-2} dt = b(0) \int_0^{t_1} \left[1 + \frac{t}{t_1 \tau}\right]^{-2} dt$$

$$x = 1 + \frac{t}{t_1 \tau} \quad dx = \frac{dt}{t_1 \tau}$$

$$\begin{aligned}
 I &= b(0) t_1 \tau \int_1^{1+1/\tau} x^{-2} dx = b(0) t_1 \tau \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^{1+1/\tau} \\
 I &= b(0) \tau t_1 \left[-\frac{1}{1+1/\tau} + 1 \right] = b(0) \tau t_1 \left[1 - \frac{1}{1+1/\tau} \right] \\
 I &= b(0) \tau t_1 \left[\frac{1/\tau}{1+1/\tau} \right] = \frac{b(0) t_1}{1+1/\tau} \\
 I &= \frac{1}{(1-P)\tau} \frac{1}{1+(1-P)/P} t_1 = \frac{1-P}{(1-P)P} P t_1 = t_1
 \end{aligned}$$

★ ★ ★

478. A correlação entre a SFR e a densidade superficial do gás em galáxias normais e galáxias *starburst* encontrada por Kennicutt (1998) pode ser escrita

$$SFR \simeq 2.5 \times 10^{-4} \Sigma_g^{1.4}$$

onde a SFR está em $M_\odot \text{ kpc}^{-2} \text{ ano}^{-1}$ e a densidade Σ_g está em $M_\odot/\text{pc}^2$. As galáxias A e B têm densidades de gás dadas por $\Sigma_A = 10 M_\odot/\text{pc}^2$ e $\Sigma_B = 10^4 M_\odot/\text{pc}^2$, respectivamente. (a) Qual é a SFR destas galáxias em unidades de $M_\odot \text{ pc}^{-2} \text{ Gano}^{-1}$? (b) Compare o resultado em (a) com a taxa média atual da Galáxia, que é da ordem de $SFR \simeq 5 M_\odot \text{ pc}^{-2} \text{ Gano}^{-1}$. Alguma das galáxias A e B pode ser considerada como *starburst*?

Solução:

$$(a) SFR_A = (2.5 \times 10^{-4}) (10^{1.4}) = 6.28 \times 10^{-3} \frac{M_\odot}{\text{kpc}^2 \text{ ano}}$$

$$SFR_B = (2.5 \times 10^{-4}) (10^4)^{1.4} = 9.95 \times 10 \frac{M_\odot}{\text{kpc}^2 \text{ ano}}$$

$$\frac{M_\odot}{\text{kpc}^2 \text{ ano}} = \frac{M_\odot}{1000^2 \text{ pc}^2 10^{-9} \text{ Gano}} = 10^3 \frac{M_\odot}{\text{pc}^2 \text{ Gano}}$$

$$SFR_A \simeq 6.28 \frac{M_\odot}{\text{pc}^2 \text{ Gano}}$$

$$SFR_B \simeq 9.95 \times 10^4 \frac{M_\odot}{\text{pc}^2 \text{ Gano}}$$

$$(b) \frac{SFR_A}{SFR_G} \simeq \frac{6.28}{5} \simeq 1.3$$

$$\frac{SFR_B}{SFR_G} \simeq \frac{9.95 \times 10^4}{5} \simeq 2 \times 10^4 \longrightarrow \text{starburst}$$

★ ★ ★

479. Em um estudo da taxa de formação estelar em galáxias Kennicutt (1989) encontrou que a densidade limite para formação estelar em uma galáxia é $\Sigma_H \simeq 4 M_\odot/\text{pc}^2$. (a) Qual é a densidade de coluna de H (N_H) (em cm^{-2}) correspondente a este valor? (b) Supondo que o H está concentrado em uma nuvem com densidade $n_H \sim 10 \text{ cm}^{-3}$, qual seria a dimensão típica desta nuvem (em cm e em pc)?

Solução:

$$(a) N_H = \Sigma_H \frac{M_\odot}{\text{pc}^2} \frac{(1.99 \times 10^{33}) \text{ g} \times \text{H pc}^2}{M_\odot (1.67 \times 10^{-24}) \text{ g} (3.086 \times 10^{18})^2 \text{ cm}^2}$$

$$N_H = \frac{1.99 \times 10^{33}}{(1.67 \times 10^{-24}) (3.086 \times 10^{18})^2} \Sigma_H = 1.25 \times 10^{20} \Sigma_H$$

$$N_H \simeq 5.0 \times 10^{20} \text{ cm}^{-2}$$

$$(b) N \simeq n L$$

$$L \simeq \frac{N}{n} \simeq \frac{5 \times 10^{20}}{10} \simeq 5 \times 10^{19} \text{ cm} \simeq 16 \text{ pc}$$

★ ★ ★

480. A taxa de formação estelar na região entre as distâncias galactocêntricas $R = 0$ e $R = 10 \text{ kpc}$ é da ordem de $\log \Sigma_{SFR} \simeq 0.6$, onde Σ_{SFR} é dada em $M_\odot \text{ pc}^{-2} \text{ Gano}^{-1}$. Qual seria o valor correspondente da taxa de formação estelar em $M_\odot/\text{ano}$ nesta região?

Solução:

$$\Sigma_{SFR} \simeq 10^{0.6} \simeq 4.0 M_\odot \text{ pc}^{-2} \text{ Gano}^{-1}$$

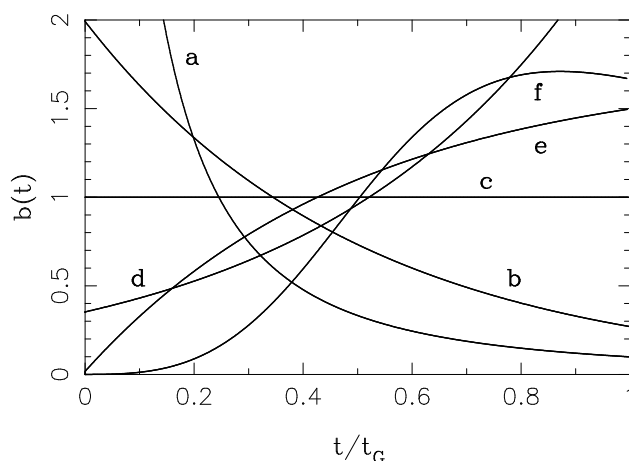
$$S = \pi R^2 = (3.14) (10^4)^2 = 3.14 \times 10^8 \text{ pc}^2$$

$$\Sigma'_{SFR} \simeq \Sigma_{SFR} S \simeq \left(4.0 \frac{M_\odot}{\text{pc}^2 \text{ Gano}} \right) \left(\frac{\text{Gano}}{10^9 \text{ ano}} \right) (3.14 \times 10^8 \text{ pc}^2)$$

$$\Sigma'_{SFR} \simeq 1.26 M_\odot/\text{ano}$$

★ ★ ★

481. A figura abaixo mostra diversas possibilidades sugeridas na literatura para a variação temporal da taxa de formação estelar. (a) Suponha que a Galáxia teve uma taxa de formação estelar essencialmente constante, desde $t = 0$ até $t = t_G$, sendo t_G a idade da Galáxia, cerca de 13.6 Ganos. Qual das SFR mostradas na figura seria mais adequada para descrever esta evolução? (b) Suponha agora que, entre as épocas $t_G/5$ e $4 t_G/5$ houve uma queda de matéria (*infall*) causada pela captura de uma galáxia do Grupo Local. Qual das SFR da figura seria mais adequada para descrever esta nova situação?



Solução:

(a) Curva c, (b) curva f

★ ★ ★

482. A evolução da metalicidade galáctica média com o tempo, conhecida como relação idade-metalicidade, pode ser escrita de maneira aproximada como

$$[\text{Fe}/\text{H}] \simeq A - \frac{B}{C + t}$$

onde $A = 0.68$, $B = 11.2 \text{ Gano}$, $C = 8 \text{ Gano}$, e o tempo t está em Gano (Rana 1991). Estime a idade média e o intervalo de idades correspondente para uma estrela com $[\text{Fe}/\text{H}] = -0.2 \text{ dex}$, considerando (a) a dispersão $\sigma[\text{Fe}/\text{H}] \simeq 0.26 \text{ dex}$ de Edvardsson et al. (2000) e (b) a dispersão média $\sigma[\text{Fe}/\text{H}] \simeq 0.13 \text{ dex}$ de Rocha-Pinto et al. (2000). Considere a idade da Galáxia como 13 Ganos.

Solução:

(a) Da relação de Rana $t_m \simeq 4.73 \text{ Gano}$

o intervalo de t é

$$1.82 < t(\text{Gano}) < 10.0$$

a idade é $I = t_G - t$

portanto

$$I_m = 13.0 - 4.73 = 8.27 \text{ Gano}$$

$$3.0 < I(\text{Gano}) < 11.2$$

(b) Neste caso $t_m \simeq 4.73 \text{ Gano}$

o intervalo de t é

$$3.09 < t(\text{Gano}) < 6.93$$

$$I_m = 13.0 - 4.73 = 8.27 \text{ Gano}$$

$$6.07 < I(\text{Gano}) < 9.91$$

★ ★ ★

483. O aglomerado estelar das Hyades tem metalicidade dada por $[\text{Fe}/\text{H}] \simeq 0.13$. Considere a relação idade-metalicidade do exercício anterior e determine qual seria a idade aproximada do aglomerado. Considere a idade da Galáxia como 13 Ganos.

Solução:

Da relação do exercício anterior

$$\frac{B}{C+t} \simeq A - [\text{Fe}/\text{H}]$$

$$C+t \simeq \frac{B}{A - [\text{Fe}/\text{H}]}$$

$$t \simeq \frac{B}{A - [\text{Fe}/\text{H}]} - C \simeq \frac{11.2}{0.68 - 0.13} - 8 \simeq 12.36 \text{ Gano}$$

$$\text{idade } I \simeq 13.0 - 12.36 \simeq 0.64 \text{ Gano}$$

★ ★ ★

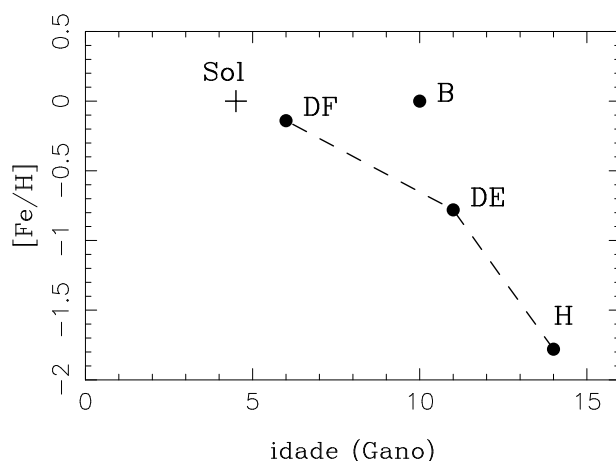
484. Uma relação idade-metalicidade aproximada para as estrelas do disco fino, disco espesso, halo e bojo galácticos está mostrada na tabela abaixo (Gibson et al. 2003). Faça um gráfico da metalicidade $[\text{Fe}/\text{H}]$ em função da idade de acordo com os dados da tabela. Assinale a posição do Sol neste gráfico.

	Idade (Gano)	$[\text{Fe}/\text{H}]$
Halo	14	-1.78
Disco espesso	11	-0.78
Disco fino	6	-0.14
Bojo	10	0

Solução:

O gráfico está a seguir. Na posição do Sol temos

$$[\text{Fe}/\text{H}] = 0, \text{ idade } I = 4.5 \text{ bilhões de anos}$$



★ ★ ★

485. Uma determinação aproximada da relação idade-metalicidade pode ser escrita

$$[\text{Fe}/\text{H}] = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$$

onde $a_0 = 0.19833$, $a_1 = 0.00991$, $a_2 = -0.02318$, $a_3 = 0.00410$, $a_4 = -1.40361 \times 10^{-4}$ e t é a idade em Gano. (a) Considerando uma dispersão da ordem de 0.20 dex, qual seria a metalicidade para o Sol, com idade de 4.5 Gano? (b) Qual seria a metalicidade esperada para uma estrela com idade de 10 Gano?

Solução:

(a) Para $t = 4.5$ Gano, obtemos

$$\langle [\text{Fe}/\text{H}] \rangle \simeq 0.00$$

$$-0.20 < [\text{Fe}/\text{H}] < 0.20$$

(b) Para $t = 10$ Gano, obtemos

$$\langle [\text{Fe}/\text{H}] \rangle \simeq -0.30$$

$$-0.50 < [\text{Fe}/\text{H}] < -0.10$$

★ ★ ★

486. Abundâncias médias de oxigênio $\epsilon(\text{O}) = \log(\text{O}/\text{H}) + 12$ em nebulosas planetárias do disco galáctico localizadas em diferentes distâncias galactocêntricas R e com idades típicas estão dadas na tabela a seguir. (a) Use estes dados e estime uma relação idade-metalicidade (AMR) na forma $[\text{Fe}/\text{H}] = f(t)$ para a vizinhança solar, admitindo $R_0 = 8.0$ kpc. Adote uma calibração $[\text{Fe}/\text{H}] = f(\text{O}/\text{H})$ correspondente aos valores solares, $\epsilon(\text{O}) \simeq 8.7$ e $\epsilon(\text{Fe}) \simeq 7.5$, e admita a idade da Galáxia como de 13 Gano. (b) Faça um gráfico de $[\text{Fe}/\text{H}]$ em função do tempo, inclua seus resultados da letra (a) e também a relação média de Rana (1991) definida no Exercício 482.

idade (Gano)	$\epsilon(\text{O})$ 4.0 kpc	$\epsilon(\text{O})$ 8.0 kpc	$\epsilon(\text{O})$ 12 kpc	tempo (Gano)	[Fe/H]
1	9.10	8.80	8.50	12	0.10
2	9.05	8.75	8.45	11	0.05
3	9.00	8.70	8.40	10	0.00
4	8.90	8.60	8.30	9	-0.10
5	8.80	8.50	8.20	8	-0.20
6	8.70	8.40	8.10	7	-0.30
7	8.60	8.20	8.00	6	-0.50
8	8.50	8.10	7.80	5	-0.60

Solução:

(a) Definindo

$$\frac{n_{Fe}}{n_H} = \frac{\text{Fe}}{\text{H}}, \quad \frac{n_O}{n_H} = \frac{\text{O}}{\text{H}}$$

com a calibração adotada temos

$$\frac{\text{Fe}}{\text{H}} = k \frac{\text{O}}{\text{H}}$$

$$10^{7.5-12} = k 10^{8.7-12}$$

$$k = 0.063, \quad \log k = -1.20$$

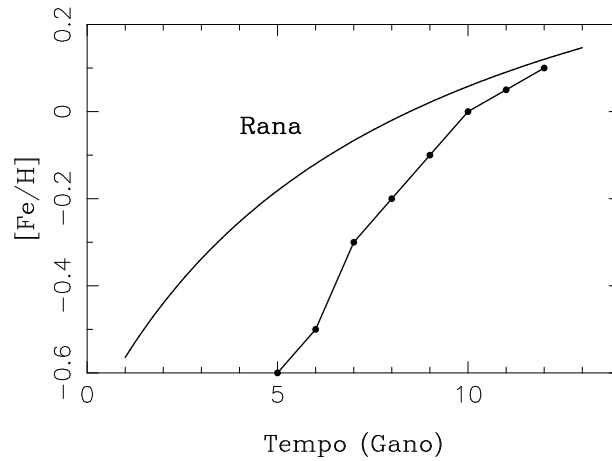
$$\log(\text{Fe}/\text{H}) = \log k + \log(\text{O}/\text{H})$$

$$[\text{Fe}/\text{H}] = \log k + \log(\text{O}/\text{H}) - \log(\text{Fe}/\text{H})_{\odot} = -1.20 + \epsilon(\text{O}) - \epsilon(\text{Fe})_{\odot}$$

$$[\text{Fe}/\text{H}] = \epsilon(\text{O}) - 8.70$$

Os resultados estão nas duas últimas colunas da tabela. A coluna 5 mostra o tempo $t = 13 - \text{idade}$, e a coluna 6 os valores calculados de [Fe/H]

(b) O gráfico está a seguir, incluindo a relação de Rana. O acordo é bom para metalicidade solar e pobre para as metalicidades mais baixas, provavelmente pelo erro nas idades.



VÍNCULOS OBSERVACIONAIS

487. Considere a distribuição de metalicidades do disco galáctico dada nas duas primeiras colunas da tabela a seguir (Rocha-Pinto e Maciel 1996), onde são dadas as frações de estrelas N/N_{tot} em função da metalicidade $[Fe/H]$. (a) Obtenha a distribuição cumulativa de metalicidades $S(Z)$ em função de Z/Z_1 , onde Z_1 é a metalicidade atual, admitindo que $Z \simeq 600 (n_{Fe}/n_H) = (F/H)$, tomando $\epsilon(Fe)_{\odot} = 7.5$ e $Z_1 \simeq 0.028$. Faça um gráfico de $S(Z)$ em função de Z/Z_1 . (b) O resultado obtido com o modelo simples pode ser expresso pela relação

$$S(Z) = \frac{1 - \mu_1^{Z/Z_1}}{1 - \mu_1}$$

onde $\mu_1 \simeq 0.10$ é a fração de gás atual. Obtenha a distribuição esperada para $-1.2 < \log(Z/Z_1) < 0$ e inclua seus resultados no gráfico.

Solução:

Temos

$$[Fe/H] = \log(Fe/H) - \log(Fe/H)_{\odot}$$

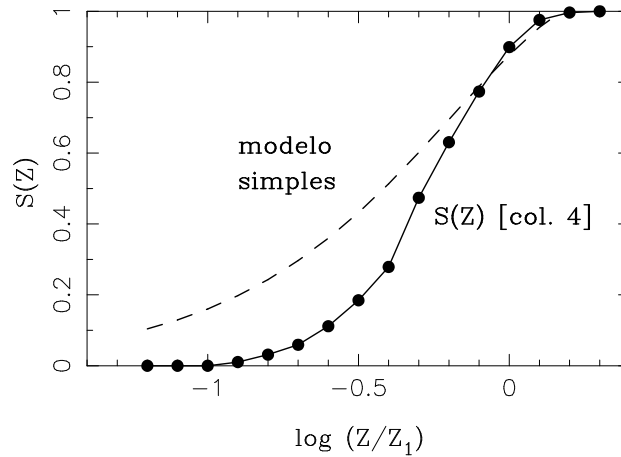
$$\log(Fe/H) = [Fe/H] + \log(Fe/H)_{\odot} = [Fe/H] + 4.5$$

Como $Z = 600 (Fe/H)$ temos

$$\frac{Z}{Z_1} = \frac{600}{0.028} (Fe/H) = 2.14 \times 10^4 (Fe/H)$$

[Fe/H]	N/N_{tot}	$\log Z/Z_1$	$S(Z)$
-1.2 a -1.1	0	-1.37 a -1.27	0
-1.1 a -1.0	0	-1.27 a -1.17	0
-1.0 a -0.9	0	-1.17 a -1.07	0
-0.9 a -0.8	0.0104	-1.07 a -0.97	0.0104
-0.8 a -0.7	0.0209	-0.97 a -0.87	0.0313
-0.7 a -0.6	0.0279	-0.87 a -0.77	0.0592
-0.6 a -0.5	0.0523	-0.77 a -0.67	0.1115
-0.5 a -0.4	0.0732	-0.67 a -0.57	0.1847
-0.4 a -0.3	0.0941	-0.57 a -0.47	0.2788
-0.3 a -0.2	0.1951	-0.47 a -0.37	0.4739
-0.2 a -0.1	0.1568	-0.37 a -0.27	0.6307
-0.1 a +0.0	0.1429	-0.27 a -0.17	0.7736
+0.0 a +0.1	0.1274	-0.17 a -0.07	0.8990
+0.1 a +0.2	0.0766	-0.07 a +0.03	0.9756
+0.2 a +0.3	0.0209	+0.03 a +0.13	0.9965
+0.3 a +0.4	0.0035	+0.13 a +0.23	1.0000

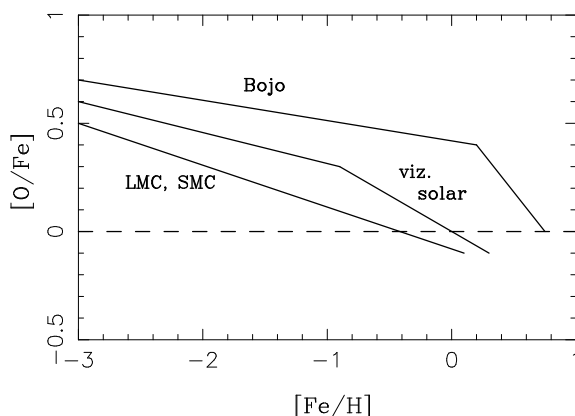
desta relação podem ser obtidos os resultados da coluna 3 da tabela.
A coluna 4 pode ser obtida somando cumulativamente os dados da coluna 2.
O gráfico está a seguir.



(b) A solução para o modelo simples está mostrada na figura. O modelo simples superestima o número de estrelas de baixa metalicidade.

★ ★ ★

488. A figura abaixo mostra esquematicamente a relação entre a razão $[O/Fe]$ em função da metalicidade $[Fe/H]$ para a vizinhança solar, bojo e Nuvens de Magalhães. Como você poderia explicar as principais diferenças observadas entre essas três regiões?



Solução:

- A formação estelar foi mais rápida no bojo do que na vizinhança solar
- A formação estelar foi mais lenta nas Nuvens do que na vizinhança solar
- A razão $[O/Fe]$ permanece alta no bojo mesmo para metalicidades altas
- Nas Nuvens $[O/Fe]$ torna-se solar para metalicidades abaixo da solar
- O bojo tem $[O/Fe]$ mais altas que a vizinhança solar, pois se formou logo após as primeiras supernovas de tipo II terem espalhado oxigênio
- Nas Nuvens a formação de estrelas foi mais gradual, de modo que a maior parte das estrelas tem um maior conteúdo de Fe, ou menor $[O/Fe]$
- A vizinhança solar forma um caso intermediário entre o bojo e as Nuvens

★ ★ ★

489. Um modelo de evolução química da Galáxia produz uma relação entre a razão $[O/Fe]$ e a metalicidade $[Fe/H]$ dada por

$$[O/Fe] = a_0 + a_1 [Fe/H] + a_2 [Fe/H]^2 + a_3 [Fe/H]^3$$

onde $a_0 = 0.03442$, $a_1 = -0.56544$, $a_2 = -0.23052$ e $a_3 = -0.03131$. Uma estrela do halo tem $[Fe/H] = -3.0$ e $[O/Fe] = 0.60$, enquanto que uma estrela do disco fino tem $[Fe/H] = 0.0$ e $[O/Fe] = 0.0$. Qual destas estrelas é melhor representada pelo modelo de evolução química?

Solução:

Os valores calculados de $[O/Fe]_c$ estão na coluna 4 da tabela a seguir.

para a estrela do halo

$$\Delta[\text{Fe}/\text{H}] = 0.50 - 0.60 \simeq -0.10$$

para a estrela do disco

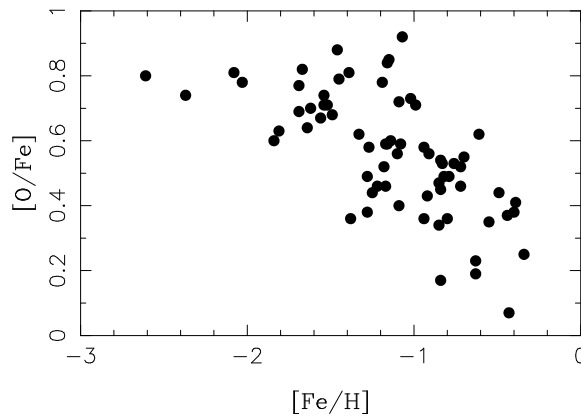
$$\Delta[\text{Fe}/\text{H}] = 0.03 - 0.00 \simeq 0.03$$

a estrela do disco é melhor representada.

estrela	$[\text{Fe}/\text{H}]$	$[\text{O}/\text{Fe}]$	$[\text{O}/\text{Fe}]_c$
halo	-3.0	0.60	0.50
disco fino	0.0	0.0	0.03

★ ★ ★

490. A figura a seguir mostra a relação $[\text{O}/\text{Fe}] \times [\text{Fe}/\text{H}]$ para algumas estrelas da vizinhança solar na Galáxia (Gratton et al. 2003). Considere os objetos que tenham metalicidade $[\text{Fe}/\text{H}] \simeq -1$. (a) Qual é a razão $[\text{O}/\text{Fe}]$ para estas estrelas? (b) Considerando que a abundância de Fe no Sol é $\epsilon(\text{Fe})_{\odot} = \log(\text{Fe}/\text{H})_{\odot} + 12 = 7.5$, qual é a abundância de Fe nas estrelas consideradas, $\epsilon(\text{Fe})$? (c) Qual é a abundância de oxigênio destas estrelas, $\epsilon(\text{O})$? Considere a abundância de oxigênio do Sol como $\epsilon(\text{O})_{\odot} = \log(\text{O}/\text{H})_{\odot} + 12 = 8.7$.



Solução:

(a) $0.75 > [\text{O}/\text{Fe}] > 0.32 \longrightarrow \langle [\text{O}/\text{Fe}] \rangle = 0.54$

(b) $[\text{Fe}/\text{H}] = \log(\text{Fe}/\text{H}) - \log(\text{Fe}/\text{H})_{\odot} = \epsilon(\text{Fe}) - \epsilon(\text{Fe})_{\odot}$

$\epsilon(\text{Fe}) = \epsilon(\text{Fe})_{\odot} + [\text{Fe}/\text{H}] = 7.5 - 1.0 = 6.5$

(c) $[\text{X}/\text{H}] = [\text{X}/\text{Fe}] + [\text{Fe}/\text{H}]$

$[\text{O}/\text{H}] = [\text{O}/\text{Fe}] + [\text{Fe}/\text{H}] \simeq 0.54 - 1.0 \simeq -0.46$

$$[O/H] = \log(O/H) - \log(O/H)_{\odot} = \epsilon(O) - \epsilon(O)_{\odot}$$

$$\epsilon(O) = \epsilon(O)_{\odot} + [O/H] \simeq 8.7 - 0.46 \simeq 8.24$$

★ ★ ★

491. Considere uma calibração para a relação entre as abundâncias de O e Fe relativas ao Sol para a vizinhança solar na forma

$$[O/H] = 0.5 [Fe/H] \quad [Fe/H] \geq -1.2$$

$$[O/H] = [Fe/H] + 0.6 \quad [Fe/H] < -1.2$$

(a) Use essa relação e obtenha uma relação entre a metalicidade $[Fe/H]$ e a abundância de oxigênio por número de átomos, $\epsilon(O) = \log(O/H) + 12$. Adote o valor $\epsilon(O)_{\odot} \simeq 8.70$ para a abundância solar de oxigênio. (b) Nesse caso, qual seria a relação entre a abundância relativa de $[O/Fe]$ e a metalicidade $[Fe/H]$? Faça gráficos de $[Fe/H]$ em função de $\epsilon(O)$ e de $[O/Fe]$ em função de $[Fe/H]$.

Solução:

$$(a) [Fe/H] = A + B \epsilon(O)$$

$$[Fe/H] = 2 [O/H] = 2 [\log(O/H) - \log(O/H)_{\odot}]$$

$$[Fe/H] = 2 [\log(O/H) + 12] - 2 [\log(O/H)_{\odot} + 12]$$

$$[Fe/H] = 2 \epsilon(O) - 2 \epsilon(O)_{\odot}$$

$$A = -2 \epsilon(O)_{\odot} = -2 \times 8.7 = -17.40 \quad B = 2.0$$

$$[Fe/H] = -17.40 + 2 \epsilon(O) \quad \text{para} \quad [Fe/H] \geq -1.2 \quad (1)$$

$$[Fe/H] = [O/H] - 0.6 = \epsilon(O) - \epsilon(O)_{\odot} - 0.6$$

$$[Fe/H] = -8.7 - 0.6 + \epsilon(O)$$

$$[Fe/H] = -9.3 + \epsilon(O) \quad \text{para} \quad [Fe/H] < -1.2 \quad (2)$$

$$(b) [O/Fe] = C + D [Fe/H]$$

$$[O/Fe] = \log(O/Fe) - \log(O/Fe)_{\odot} = \log O - \log Fe - \log O_{\odot} + \log Fe_{\odot}$$

$$= \log O - \log H - \log Fe + \log H - \log O_{\odot} + \log H_{\odot} + \log Fe_{\odot} - \log H_{\odot}$$

$$= \log(O/H) - \log(Fe/H) - \log(O/H)_{\odot} + \log(Fe/H)_{\odot}$$

isto é

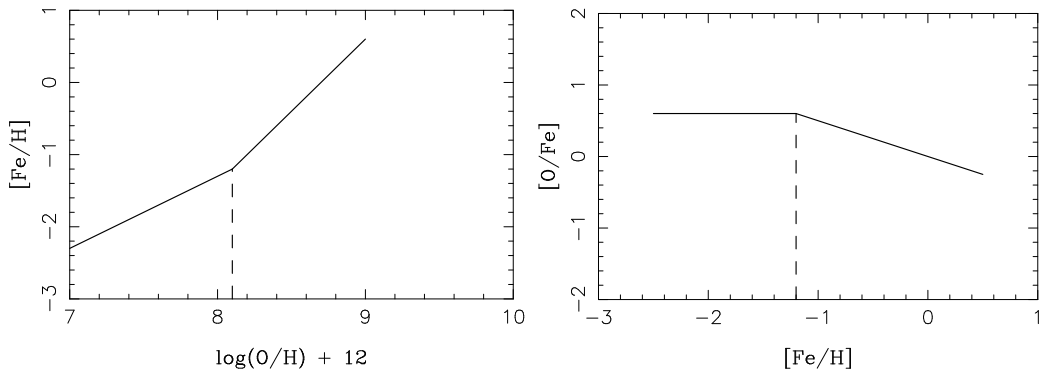
$$[O/Fe] = [O/H] - [Fe/H]$$

portanto

$$[O/Fe] = -0.5 [Fe/H] \quad \text{para} \quad [Fe/H] \geq -1.2 \quad (3)$$

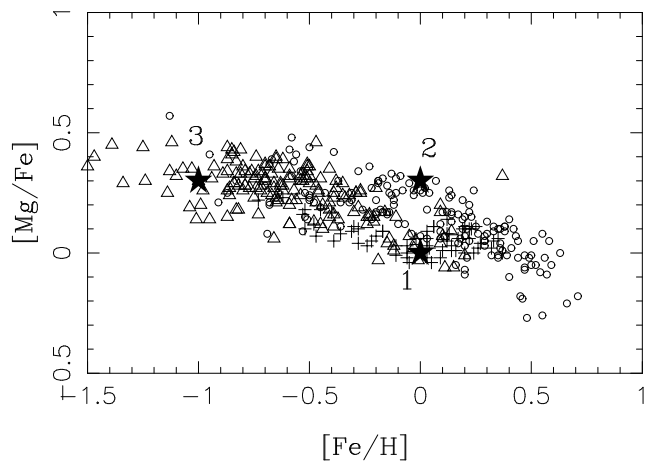
$$[O/Fe] = [O/H] - [Fe/H] = [Fe/H] + 0.6 - [Fe/H] = 0.6$$

$$[O/Fe] = 0.6 \quad \text{para} \quad [Fe/H] < -1.2 \quad (4)$$



★ ★ ★

492. A figura a seguir, a partir de dados de Bensby et al. (2005) mostra abundâncias de $[Mg/Fe]$ em função da metalicidade $[Fe/H]$ para estrelas do bojo (círculos), disco espesso (triângulos) e disco fino (cruzes). As estrelas 1,2 e 3 têm abundâncias de $[Fe/H]$ e $[Mg/H]$ dadas na tabela a seguir. Inclua estas estrelas no gráfico e indique a que populações devem pertencer.



estrela	$[Fe/H]$	$[Mg/H]$	$[Mg/Fe]_c$
1	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.3	0.3
3	-1.0	-0.7	0.3

Solução:

As abundâncias de $[\text{Mg}/\text{Fe}]$ das estrelas estão a última coluna da tabela

$$[\text{Mg}/\text{Fe}] = [\text{Mg}/\text{H}] - [\text{Fe}/\text{H}]$$

pela posição no gráfico, a estrela 1 deve estar no disco (fino/espesso), a estrela 2 no bojo, e a estrela 3 pode estar no bojo/disco espesso

★ ★ ★

493. A variação da densidade de gás atômico pode ser colocada na forma

$$\log \Sigma_{at} = a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + a_3 R^3$$

válida no intervalo $4 < R \text{ (kpc)} < 15$, onde os coeficientes são $a_0 = -0.88379$, $a_1 = 0.63848$, $a_2 = -0.06334$ e $a_3 = 0.00187$, e as unidades são $M_\odot/\text{pc}^2$. (a) Qual é a densidade de gás atômico, dada em $M_\odot/\text{pc}^2$, na distância galactocêntrica do Sol, adotando $R_0 = 8.5 \text{ kpc}$? (b) Admita que esta densidade é válida para a vizinhança do Sol, e que o disco tem uma espessura $h = 300 \text{ pc}$. Qual é a densidade de gás nesta região, dada em número de átomos de H por cm^3 ?

Solução:

(a) Para $R_0 = 8.5 \text{ kpc}$, $\log \Sigma_{at} \simeq 1.12$

$$\Sigma_{at} = 10^{1.12} \simeq 13.18 M_\odot/\text{pc}^2$$

$$\Sigma_{at} = \frac{(13.18)(1.99 \times 10^{33})}{(3.09 \times 10^{18})^2} \simeq 2.75 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

$$(b) n_{at} = \frac{\Sigma_{at}}{h m_H} \simeq \frac{(2.75 \times 10^{-3})}{(300 \times 3.09 \times 10^{18})(1.67 \times 10^{-24})} \simeq 1.8 \text{ H/cm}^3$$

★ ★ ★

494. Um ajuste para a densidade superficial de massa total no disco galáctico ($M_\odot/\text{pc}^2$) pode ser escrito como

$$\sigma_t = \sigma_0 e^{-\alpha(R-R_0)} \quad (1)$$

onde $\sigma_0 = 54 M_\odot/\text{pc}^2$, $\alpha = 0.269 \text{ kpc}^{-1}$ com $R_0 = 8.5 \text{ kpc}$. Este ajuste pode também ser escrito na forma

$$\sigma_t = \sigma_c e^{-R/R_d} \quad (2)$$

onde definimos a constante σ_c e a escala de altura R_d . Quais seriam os valores correspondentes de σ_c e R_d para o ajuste (1)?

Solução:

Igualando as densidades

$$\sigma_t = \sigma_0 e^{-\alpha(R-R_0)} = \sigma_0 e^{-\alpha R + \alpha R_0} = \sigma_0 e^{\alpha R_0} e^{-\alpha R} = \sigma_c e^{-R/R_d}$$

portanto

$$\sigma_c = \sigma_0 e^{\alpha R_0} \simeq 531 M_\odot/\text{pc}^2$$

$$\alpha = \frac{1}{R_d}$$

$$R_d = \frac{1}{\alpha} \simeq 3.7 \text{ kpc}$$

★ ★ ★

495. Os gradientes radiais de O/H e Fe/H podem ser escritos como

$$\epsilon(X) = A_X + B_X R$$

onde $A_O = 9.26$, $B_O = -0.055 \text{ dex/kpc}$, $A_{Fe} = 8.09$ e $B_{Fe} = -0.060 \text{ dex/kpc}$. Obtenha uma expressão para a abundância de Fe/H em função da abundância de O/H. Com base neste resultado, você pode concluir que o oxigênio é um bom indicador de metalicidade, assim como o Fe?

Solução:

$$\epsilon(O) = A_O + B_O R$$

$$\epsilon(Fe) = A_{Fe} + B_{Fe} R$$

$$R = \frac{\epsilon(O) - A_O}{B_O}$$

$$\epsilon(Fe) = A_{Fe} + B_{Fe} \frac{\epsilon(O) - A_O}{B_O} = A_{Fe} + \frac{B_{Fe} \epsilon(O)}{B_O} - \frac{B_{Fe} A_O}{B_O}$$

$$\epsilon(Fe) = \left[A_{Fe} - \frac{B_{Fe} A_O}{B_O} \right] + \left[\frac{B_{Fe}}{B_O} \right] \epsilon(O)$$

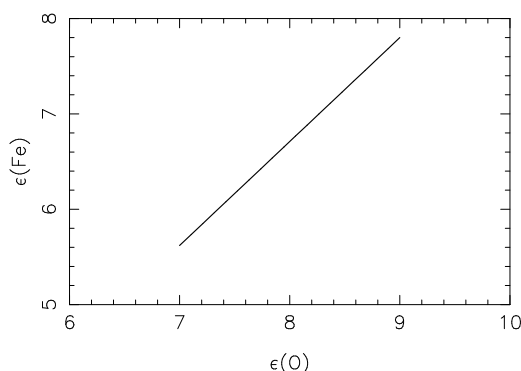
que pode ser escrita

$$\epsilon(Fe) = \alpha + \beta \epsilon(O)$$

$$\alpha = 8.09 - \frac{(-0.060)(9.26)}{(-0.055)} \simeq -2.01$$

$$\beta = \frac{-0.060}{-0.055} \simeq 1.09$$

ver gráfico a seguir



Sim, O/H varia linearmente com Fe/H (*in lockstep*)

★ ★ ★

496. Suponha que o gradiente radial de oxigênio medido para as nebulosas fotoionizadas da nossa Galáxia seja dado por $\epsilon(\text{O}) = a + bR$, onde $a = 9.5 \text{ dex}$, $b = -0.05 \text{ dex/kpc}$ e R é a distância galactocêntrica em kpc. O gradiente de Fe pode ser medido em estrelas e aglomerados, com o resultado $[\text{Fe}/\text{H}] = c + dR$, onde $c = 0.5 \text{ dex}$ e $b = -0.08 \text{ dex/kpc}$. Faça um gráfico das abundâncias de oxigênio $\epsilon(\text{O})$ e de Fe $\epsilon(\text{Fe})$ em função da distância galactocêntrica para $2 < R < 15 \text{ kpc}$. Onde está localizado o Sol neste gráfico?

Solução:

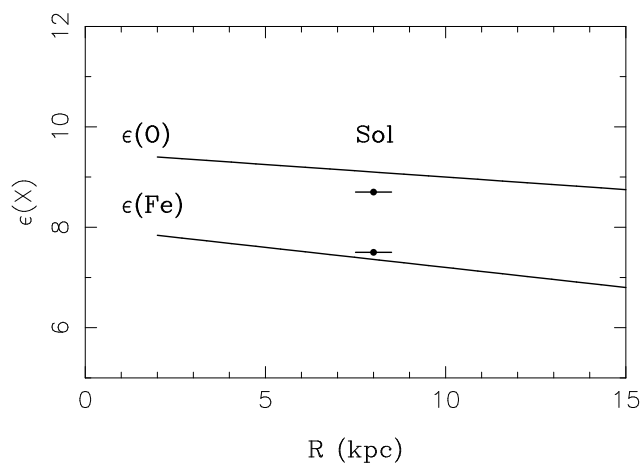
Para o Fe temos

$$[\text{Fe}/\text{H}] = \epsilon(\text{Fe}) - \epsilon(\text{Fe})_{\odot}$$

$$\epsilon(\text{Fe}) = \epsilon(\text{Fe})_{\odot} + [\text{Fe}/\text{H}] = 7.5 + 0.5 - 0.08R = 8 - 0.08R$$

o gráfico está abaixo, adotando para o Sol

$$\epsilon(\text{O}) \simeq 8.7, \epsilon(\text{Fe}) \simeq 7.5, R \simeq 7.6$$



★ ★ ★

497. Supondo que o gradiente radial de abundância na Galáxia seja linear, a abundância de um elemento X à distância galactocêntrica R pode ser escrita como $\epsilon(X) = a + b R$, onde $\epsilon(X)$ está em dex e R em kpc. O gradiente de oxigênio medido pelas regiões HII é aproximadamente $d \log(O/H)/dR \simeq -0.040$ dex/kpc (Stasińska (2000)). Adotando o valor para a abundância de oxigênio no Sol $\epsilon(O)_{\odot} = 8.70$, quais seriam os valores das constantes a e b ? Considere a distância do Sol ao centro da Galáxia como $R_0 = 7.6$ kpc. Comente seu resultado.

Solução:

Admitindo que o Sol está no plano galáctico, e que sua abundância de O é representativa da abundância interestelar em R_0 , temos

$$b = -0.040 \text{ dex/kpc}$$

$$a = \epsilon(X) - b R = \epsilon(X_{\odot}) - b R_0 = 8.70 + (0.040 \times 7.6) = 9.00 \text{ dex}$$

★ ★ ★

MÉTODOS BÁSICOS - MODELOS

498. Vamos considerar um sistema fechado, sem queda de matéria (*infall*), composto de um gás inicialmente pobre em metais. Admita reciclagem instantânea, e que a massa total do sistema M está inicialmente na forma de gás M_g , que a IMF é constante, de modo que a fração retornada R e o *yield* y são constantes no tempo. (a) Obtenha uma expressão para a metalicidade Z em função da fração de matéria na forma de gás $\mu = M_g/M$ onde $M = M_* + M_g$ e M_* é a massa na forma de estrelas. (b) Faça um gráfico da metalicidade Z em função da razão μ para o intervalo $0 \leq \mu \leq 1$ adotando $y = 0.010$. (c) Admita que o valor atual da fração de gás para a Galáxia seja $\mu = \mu_1 \simeq 0.1$. Qual seria o valor máximo alcançado pela metalicidade Z ? (d) Obtenha uma expressão para a razão μ e a metalicidade Z em função do tempo e faça um gráfico de $Z \times t$, com $t = t_1$ para a época atual.

Solução:

(a) Neste caso a variação da massa de estrelas e de gás pode ser escrita

$$\frac{dM_*}{dt} = (1 - R) \psi \quad (1)$$

$$\frac{dM_g}{dt} = -(1 - R) \psi \quad (2)$$

onde ψ é a taxa de formação estelar. A variação da metalicidade com o tempo pode ser escrita

$$M_g \frac{dZ}{dt} = y (1 - R) \psi \quad (3)$$

considerando que $dZ/dt = (dZ/dM_g) (dM_g/dt)$ temos

$$M_g \frac{dZ}{dM_g} = \frac{M_g (dZ/dt)}{(dM_g/dt)} = \frac{y(1-R)\psi}{-(1-R)\psi} = -y$$

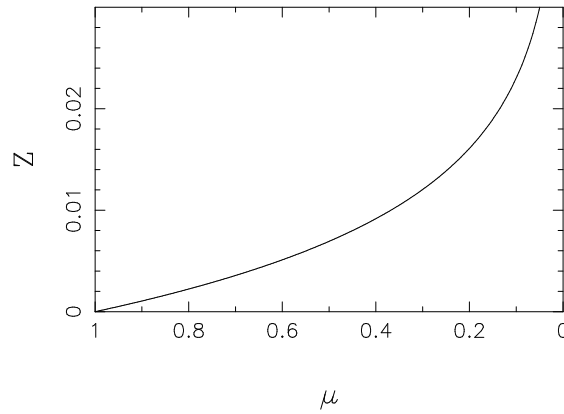
$$dZ = -y \frac{dM_g}{M_g}$$

considerando $Z_0 = 0$ e $M_{g0} = M$ temos

$$Z = y \ln \frac{M}{M_g} = y \ln \mu^{-1} = y \ln \left[1 + \frac{M_*}{M_g} \right] \quad (4)$$

este é o chamado *modelo simples* de evolução química da Galáxia.

(b) O gráfico está a seguir. À medida que μ decresce, a abundância dos elementos pesados aumenta.



(c) Neste caso, para $\mu \simeq 0.1$, temos $Z \simeq 0.02$ com o valor dado para o *yield*.

(d) Integrando a relação (2) temos

$$\int_{M_{g0}}^{M_g} dM_g = -(1-R)\psi \int_0^t dt$$

$$M_g = M - (1-R)\psi t \quad (5)$$

com a definição da fração de gás μ temos

$$\mu = \frac{M_g}{M} = 1 - \frac{(1-R)\psi t}{M} \quad (6)$$

adotando $\mu = \mu_1$ para $t = t_1$

$$\mu_1 = 1 - \frac{(1-R)\psi t_1}{M}$$

$$M = \frac{(1-R)\psi t_1}{1 - \mu_1}$$

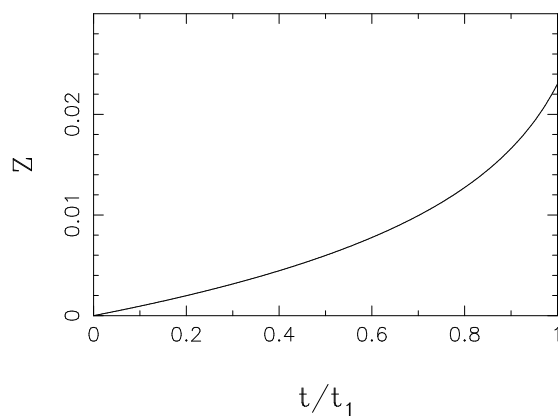
substituindo na relação (6)

$$\mu = 1 - (1 - \mu_1) \frac{t}{t_1} \quad (7)$$

considerando as relações (7) e (4) obtemos

$$Z = y \ln \left[\frac{1}{1 - (1 - \mu_1) (t/t_1)} \right]$$

a variação temporal de Z está mostrada na figura a seguir, que pode ser comparada com a figura anterior.



★ ★ ★

499. Considere a evolução química de um sistema semelhante ao do exercício anterior, mas incluindo um processo de queda de matéria (*infall*) em que o gás ejetado pelas estrelas está em equilíbrio com a formação estelar. Admita que o gás do *infall* tem metalicidade nula. (a) Mostre que a metalicidade Z pode ser escrita neste caso

$$Z = y (1 - e^{-\nu})$$

onde y é novamente o *yield* e o parâmetro ν é definido como a razão entre a massa acrescentada ao gás e a massa inicial M_0

$$\nu = \frac{M - M_0}{M_0}$$

(b) Faça um gráfico da metalicidade Z em função do parâmetro ν considerando os limites $0 \leq \mu \leq 1$, onde μ é novamente a razão da massa de gás para a massa total. Considere $y = 0.010$ e $\mu_1 \simeq 0.1$

Solução:

(a) Neste caso a taxa de formação estelar ψ fica

$$\psi = E + f$$

onde E é a taxa de matéria ejetada pelas estrelas e f a taxa de *infall*.

A variação da massa de gás do disco é

$$\frac{dM_g}{dt} = -\psi + E + f = 0$$

ou seja, a massa de gás permanece constante. Nas condições dadas temos

$$E = R\psi$$

de modo que

$$\psi = R\psi + f$$

$$f = \psi(1 - R)$$

a equação para a variação da metalicidade é

$$\frac{d(ZM_g)}{dt} = -Z(1 - R)\psi + y(1 - R)\psi + Z_f f$$

onde Z_f é a metalicidade do *infall*. Podemos escrever

$$\frac{d(ZM_g)}{dt} = Z \frac{dM_g}{dt} + M_g \frac{dZ}{dt}$$

de modo que a variação da metalicidade dZ/dt fica

$$M_g \frac{dZ}{dt} = (y - Z)(1 - R)\psi + Z_f f = (y - Z + Z_f)(1 - R)\psi$$

a variação da massa de estrelas é como no exercício anterior

$$\frac{dM_*}{dt} = (1 - R)\psi$$

como $dZ/dt = (dZ/dM)(dM/dt)$ e $dM/dt = dM_*/dt$ obtemos

$$M_g \frac{dZ}{dM} = y - Z + Z_f$$

considerando $Z_f = 0$ temos a equação final

$$M_g \frac{dZ}{dM} = y - Z$$

como $M_g = \text{constante}$, a massa na forma de estrelas aumenta e a massa total também aumenta. Considerando o parâmetro ν

$$\nu = \frac{M - M_g}{M_g} = \frac{1}{\mu} - 1$$

onde usamos a fração de gás μ . A solução da equação para Z é então

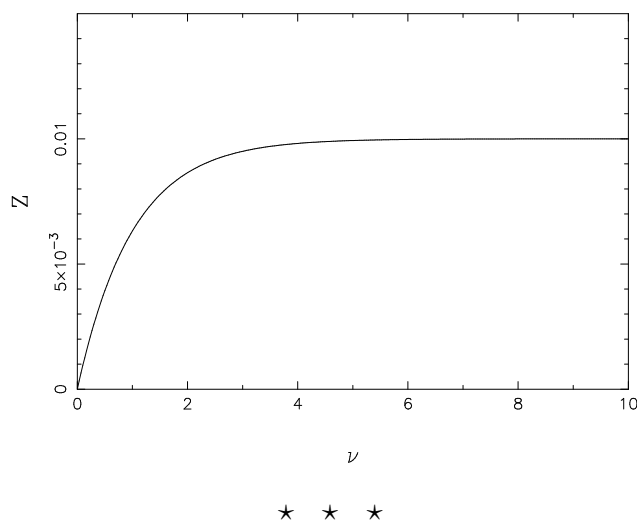
$$Z = y(1 - e^{-\nu})$$

que é a relação procurada.

(b) para $\mu \rightarrow 1$, $M_* \rightarrow 0$, $M_g \rightarrow M$, e $\nu \rightarrow 0$, $Z \rightarrow 0$

para $\mu \rightarrow 0$, ν cresce indefinidamente e $Z \rightarrow y$

para $\mu \rightarrow \mu_1 \simeq 0.1$, $\nu_1 \simeq 9$, $Z \simeq y$



500. Considere novamente a evolução química de um sistema com massa M , massa de gás M_g e massa em estrelas M_* , com formação estelar a uma taxa ψ , sendo E a taxa de gás ejetada pelas estrelas. O sistema sofre *infall* a uma taxa constante f , de material com metalicidade Z_f . Neste caso, o *infall* não está em equilíbrio com o gás processado nas estrelas (formação estelar e ejeção de matéria), mas corresponde à metade do gás envolvido nesses processos. Considere reciclagem instantânea, de modo que $E = R\psi$, onde R é a fração de retorno do gás. Admita que inicialmente não havia estrelas e que a metalicidade do gás era nula. (a) Quais são as condições iniciais envolvendo M , M_* , M_g , as metalidades Z e Z_f e a fração de gás μ ? (b) Como a massa de gás varia com o tempo? (c) Obtenha uma equação diferencial para a metalicidade Z em função da massa total M . (d) Obtenha uma solução analítica para a equação encontrada em (c). Considere que $Z_f = 0$ e que a massa associada ao *infall* é pequena com relação à massa original do sistema, ou seja, $ft \ll M_0$. Qual é o valor esperado de Z para a fração de gás atual da Galáxia, $\mu \simeq 0.10$? (d) Faça um gráfico da metalicidade Z em função da razão de gás μ .

Solução:

(a) As condições iniciais podem ser escritas como

$$M = M_0, \quad M_* = M_{*0} = 0, \quad M_g = M_{g0} = M_0, \quad Z = Z_0 = 0,$$

$$Z_f = Z_{f0}, \quad \mu = M_g/M = M_{g0}/M_0 = 1$$

(b) A variação da massa total M é

$$dM/dt = f \quad (1)$$

a variação da massa em estrelas é dada por

$$\frac{dM_*}{dt} = \psi - E = \psi - R\psi = (1 - R)\psi \quad (2)$$

para a variação da massa de gás M_g temos

$$\frac{dM_g}{dt} = -\psi + E + f = -\psi + R\psi + f = -(1-R)\psi + f \quad (3)$$

para variação da metalicidade podemos escrever

$$\frac{d(Z M_g)}{dt} = -Z (1-R)\psi + y (1-R)\psi + Z_f f \quad (4)$$

portanto

$$M_g \frac{dZ}{dt} = y (1-R)\psi + (Z_f - Z) f \quad (5)$$

a hipótese básica pode ser escrita como

$$\psi - E = \psi - R\psi = 2f$$

$$(1-R)\psi = 2f$$

$$f = \frac{(1-R)\psi}{2} \quad (6)$$

usando (3) e (6) temos

$$\frac{dM_g}{dt} = -2f + f = -f \quad (7)$$

integrando

$$\int_{M_{g0}}^{M_g} dM_g = -f \int_0^t dt$$

$$M_g = M_{g0} - f t \quad (8)$$

que é a variação da massa de gás com o tempo. Temos

$$f > 0, \quad t > 0, \quad M_g < M_{g0} \longrightarrow M_g \text{ diminui}$$

(c) A variação dZ/dt fica

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{dZ}{dM} \frac{dM}{dt} = \frac{dZ}{dM} f \quad (9)$$

usando (5) e (9) temos

$$M_g f \frac{dZ}{dM} = y (1-R)\psi + (Z_f - Z) f$$

$$M_g \frac{dZ}{dM} = \frac{2y(1-R)\psi}{(1-R)\psi} + (Z_f - Z)$$

$$M_g \frac{dZ}{dM} = 2y - Z + Z_f \quad (10)$$

que é a equação procurada.

(d) com $Z_f = 0$ temos

$$M_g \frac{dZ}{dM} = 2y - Z \quad (11)$$

podemos escrever a relação procurada

$$Z = 2 y(1 - e^{-\nu}) \quad (12)$$

onde usamos novamente o parâmetro ν

$$\nu = \frac{M - M_0}{M_0} \quad (13)$$

obtendo

$$\nu = \frac{M}{M_0} - 1 = \frac{M}{M_g} \frac{M_g}{M_0} - 1 \simeq \frac{1}{\mu} - 1 \quad (14)$$

com a hipótese feita temos $f t \ll M_0$, portanto

$$M_g = M_{g0} - f t = M_0 - f t \simeq M_{g0}$$

$$\frac{M_g}{M_0} \simeq \frac{M_{g0}}{M_0} \simeq \frac{M_{g0}}{M_{g0}} \simeq 1$$

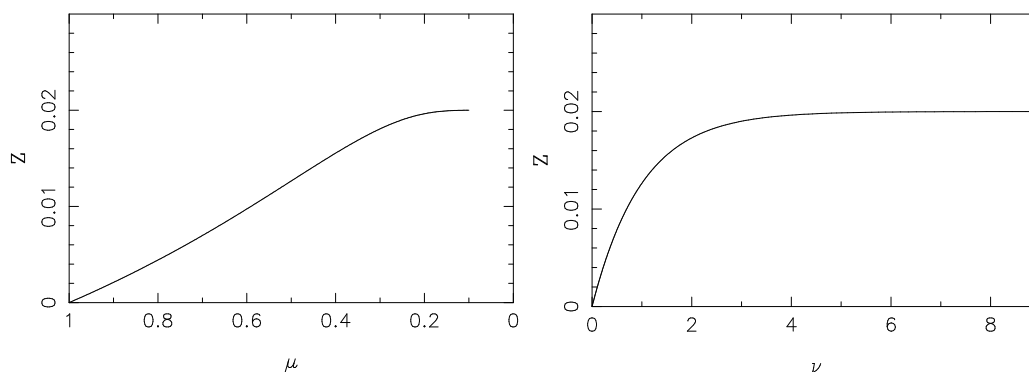
os limites são

$$\mu \rightarrow 1, \quad \nu \rightarrow 0, \quad Z \rightarrow 0$$

$$\mu \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty, \quad Z \rightarrow 2 y$$

$$\mu \rightarrow 0.10, \quad \nu \rightarrow 9, \quad Z \rightarrow 2 y$$

o gráfico está a seguir



★ ★ ★

501. Estime a fração R de matéria retornada ao meio interestelar pelas estrelas admitindo que os remanescentes estelares conservam 90% da massa das estrelas, e que a IMF para estrelas com massas $m \leq 1 M_{\odot}$ é $\phi(m) = a = \text{constante}$. Considere a massa limite $m_1 = 1 M_{\odot}$, e adote $a = 0.1 M_{\odot}^{-2}$.

Solução:

$$R = \int_{m_1}^{\infty} (m - w_m) \phi(m) dm = \int_{m_1}^{\infty} (m - 0.9 m) \phi(m) dm$$

$$R = 0.1 \int_1^\infty m \phi(m) dm \quad (1)$$

pela condição de normalização

$$\int_0^\infty m \phi(m) dm = \int_0^1 m \phi(m) dm + \int_1^\infty m \phi(m) dm = 1$$

$$\int_1^\infty m \phi(m) dm = 1 - \int_0^1 m \phi(m) dm \quad (2)$$

de (1) e (2)

$$R = 0.1 \left[1 - \int_0^1 m \phi(m) dm \right] = 0.1 \left[1 - \int_0^1 a m dm \right]$$

$$R = 0.1 \left[1 - \frac{a}{2} \right] = 0.1 (1 - 0.05) = (0.1) (0.95) = 0.095$$

★ ★ ★

502. No modelo padrão de Clayton (1985), com a aproximação de reciclagem instantânea, IMF constante e *yields* constantes a variação temporal da massa de gás M_g pode ser escrita

$$\frac{dM_g}{dt} = -\omega M_g + f \quad (1)$$

onde $f(t)$ é a taxa de *infall* e ω um parâmetro tipicamente da ordem de $\omega \simeq 0.3 \text{ Gano}^{-1}$. Mostre que a solução desta equação pode ser escrita

$$M_g = e^{-\omega t} \left[M_{g0} + \int_0^t f(t') e^{\omega t'} dt' \right] \quad (2)$$

Solução:

Para resolver a equação (1) basta multiplicar pelo fator integrante $e^{\omega t}$

$$e^{\omega t} \frac{dM_g}{dt} + e^{\omega t} \omega M_g = f e^{\omega t}$$

que pode ser escrita

$$\frac{d}{dt} (M_g e^{\omega t}) = f e^{\omega t}$$

integrando esta equação

$$\int d(M_g e^{\omega t}) = \int_0^t f e^{\omega t'} dt'$$

$$M_g e^{\omega t} \Big|_{M_{g0}}^{M_g e^{\omega t}} = \int_0^t f(t') e^{\omega t'} dt'$$

$$M_g e^{\omega t} - M_{g0} = \int_0^t f e^{\omega t'} dt'$$

portanto

$$M_g = e^{-\omega t} \left[M_{g0} + \int_0^t f(t') e^{\omega t'} dt' \right]$$

que é a equação (2)

★ ★ ★

503. No modelo padrão de Clayton a relação entre a massa de estrelas M_* e de gás M_g pode ser escrita

$$\frac{M_*}{M_g} = \frac{\omega \int_0^t \left(\frac{t'+\Delta}{\Delta}\right)^k e^{-\omega t'} dt'}{\left(\frac{t+\Delta}{\Delta}\right)^k e^{-\omega t}}$$

onde ω , Δ e k são parâmetros a serem definidos. Quais são os valores da razão M_*/M_g e da fração de gás μ para $t = 5 \text{ Gano}$? Considere $k = 0$, $\omega = 0.3 \text{ Gano}^{-1}$ e $\Delta = 1 \text{ Gano}$.

Solução:

A razão M_g/M_* fica

$$\frac{M_*}{M_g} = \frac{\omega \int_0^t e^{-\omega t'} dt'}{e^{-\omega t}}$$

com a mudança de variáveis

$$x = -\omega t, \quad dx = -\omega dt$$

temos

$$\frac{M_*}{M_g} = \frac{\omega \int_0^x e^x (-dx/\omega)}{e^x}$$

$$\frac{M_*}{M_g} = -\frac{\int_0^x e^x dx}{e^x} = -\frac{[e^x]_0^x}{e^x}$$

$$\frac{M_*}{M_g} = \frac{1 - e^x}{e^x} = e^{-x} - 1$$

ou seja

$$\frac{M_*}{M_g} = e^{\omega t} - 1$$

com os valores de ω e t

$$\frac{M_*}{M_g} \simeq 3.48$$

a fração de gás pode ser escrita

$$\mu = \frac{1}{1 + (M_*/M_g)}$$

$$\mu \simeq 0.22$$

★ ★ ★

504. No modelo padrão de Clayton para o disco galáctico a metalicidade relativa ao valor atual Z/Z_1 pode ser escrita como

$$\frac{Z}{Z_1} = \left[\frac{t + \Delta}{\Delta} - \left(\frac{t + \Delta}{\Delta} \right)^{-k} \right] \left[\frac{t_1 + \Delta}{\Delta} - \left(\frac{t_1 + \Delta}{\Delta} \right)^{-k} \right]^{-1}$$

onde t_1 é a época atual e Δ e k são parâmetros, como foi visto no Exercício 502. (a) Esboce o gráfico da metalicidade relativa Z/Z_1 em função do tempo. (b) Qual era a metalicidade Z quando a Galáxia tinha uma idade de 5 Ganos? (c) Suponha que a abundância de oxigênio nessa época era $\epsilon(\text{O}) = 8.5$. Que fração da metalicidade por massa Z era devida ao oxigênio? Adote a abundância de He por número de átomos $\text{He}/\text{H} = 0.10$. (d) Em que época ocorreu o máximo de *infall*? Adote os parâmetros $k = 2$, $\omega = 0.3 \text{ Gano}^{-1}$, $\Delta = 1 \text{ Gano}$, $t_1 = 13 \text{ Gano}$, $Z_1 = 0.028$ e $Z_f = 0$ para a metalicidade do *infall*.

Solução:

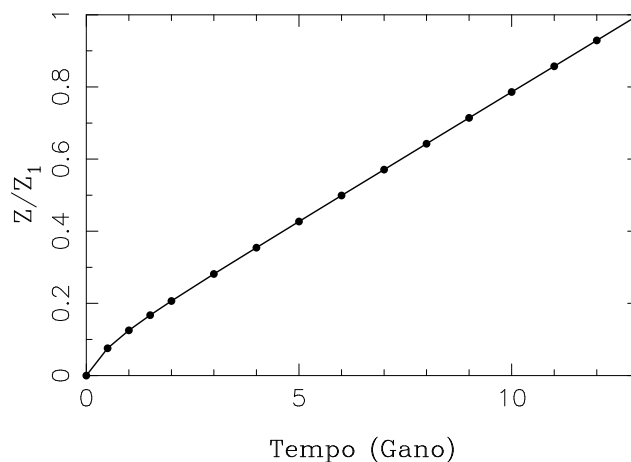
(a) Neste caso a metalicidade fica

$$\frac{Z}{Z_1} = \left[\frac{t+1}{1} - \left(\frac{t+1}{1} \right)^{-2} \right] \left[\frac{t_1+1}{1} - \left(\frac{t_1+1}{1} \right)^{-2} \right]^{-1}$$

$$\frac{Z}{Z_1} = [(t+1) - (t+1)^{-2}] [14 - 14^{-2}]^{-1}$$

$$\frac{Z}{Z_1} = \left[(t+1) - \frac{1}{(t+1)^2} \right] \frac{1}{14 - 1/14^2}$$

O resultado está na figura a seguir. Como $(t+1)$ é geralmente muito maior que $1/(t+1)^2$, o gráfico somente se desvia de uma linha reta para $t \leq 2 \text{ Gano}$.



(b) Para $t = 5$ Gano, $Z/Z_1 = 0.427 \rightarrow Z = 0.012$

(c) Podemos escrever

$$Z_O = f Z \quad (1)$$

$$Z_O = \frac{16 (O/H)}{1 + 4 (He/H) + \sum A_i n_i/n_H} \quad (2)$$

$$Z = \frac{\sum A_i n_i/n_H}{1 + 4 He/H + \sum A_i n_i/n_H} \quad (3)$$

$$\sum A_i n_i/n_H = Z + 4 (He/H) Z + (\sum A_i n_i/n_H) Z$$

simplificando a notação

$$\sum (1 - Z) = Z [1 + 4 (He/H)]$$

$$\sum = \frac{Z}{1 - Z} [1 + 4 (He/H)]$$

com $Z = 0.012$ e $He/H = 0.10$ obtemos $\sum = 0.017$

usando (1) e (2)

$$16 (O/H) = f Z [1 + 4 (He/H) + \sum A_i n_i/n_H]$$

$$f = \frac{16 (O/H)}{Z[1 + 4 (He/H) + \sum A_i n_i/n_H]} \quad (5)$$

com $\epsilon(O) = 8.5$, $(O/H) = 3.16 \times 10^{-4}$

obtemos

$$f \simeq 0.30, \quad Z_O \simeq 0.0036$$

(d) No modelo padrão com *infall* contínuo a taxa $f(t)$ pode ser escrita

$$f(t) = f_0 \left(\frac{t + \Delta}{\Delta} \right)^{k-1} e^{-\omega t}$$

onde f_0 é a taxa inicial. Para obter a época do máximo t_M , temos

$$f'(t_M) = \left[\frac{df(t)}{dt} \right]_{t_M} = 0$$

de modo que

$$t_M = \frac{k-1}{\omega} - \Delta$$

neste caso

$$t_M = \frac{2-1}{0.3} - 1 \simeq 0.3 \text{ Gano}$$

★ ★ ★

505. No melhor modelo de acréscimo de Lynden-Bell (1975) podemos definir a razão s entre a massa na forma de estrelas M_* e a massa inicial de gás M_{g0} e a razão g entre a massa de gás M_g e a massa inicial de gás M_{g0} de modo que

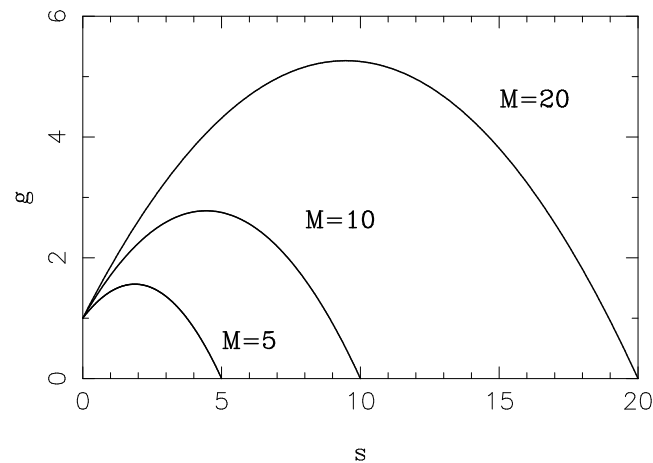
$$g(s) = \left(1 - \frac{s}{M}\right) \left(1 - \frac{s}{M} + s\right)$$

onde M é a relação entre a massa total final M_f e a massa inicial de gás M_{g0} . Considere este modelo e faça um gráfico para a variação da massa de gás $g(s)$ com a razão s . Use os valores $M = 5$, $M = 10$ e $M = 20$.

Solução:

Os resultados estão na tabela e figura a seguir

s	g_5	s	g_{10}	s	g_{20}
0	1.00	0	1.00	0	1.00
1	1.44	2	2.24	4	3.84
2	1.56	4	2.76	8	5.16
3	1.36	6	2.56	12	4.96
4	0.84	8	1.64	16	3.24
5	0.00	10	0.00	20	0.00



★ ★ ★

506. No modelo analítico para a evolução química do halo (cf. Pagel 1997, 2009), a variação com o tempo da metalicidade para elementos de pronta produção pode ser escrita

$$Z = y \omega t$$

onde y é o *yield* e ω é uma constante de proporcionalidade tal que a massa s na forma de estrelas tomada com relação à massa inicial do halo é $ds/dt = \omega g$, sendo g a massa de gás. (a) Mostre que para o oxigênio esta relação pode ser escrita

$$[\text{O}/\text{H}] = \log \frac{y(\text{O})}{Z_{\odot}(\text{O})} + \log \omega t$$

onde $y(\text{O})$ é o *yield* do oxigênio e $Z_{\odot}(\text{O})$ é a abundância de oxigênio no Sol. (b) Para os elementos que têm produção “atrasada”, a relação acima ainda pode ser adotada, admitindo reciclagem instantânea. Estime os valores de $[\text{O}/\text{H}]$ e $[\text{Fe}/\text{H}]$ para $\omega t \simeq 0.5$, adotando $y(\text{O})/Z_{\odot}(\text{O}) = 0.8$ e $y(\text{Fe})/Z_{\odot}(\text{Fe}) = 0.25$.

Solução:

(a) Temos

$$[\text{O}/\text{H}] = \log(\text{O}/\text{H}) - \log(\text{O}/\text{H})_{\odot} \quad (1)$$

da solução do modelo

$$Z(\text{O}) = y(\text{O}) \omega t \quad (2)$$

$$\text{adotando } Z(\text{O}) = k_{\text{O}} (\text{O}/\text{H}), \text{ temos } Z_{\odot}(\text{O}) = k_{\text{O}} (\text{O}/\text{H})_{\odot} \quad (3)$$

(1) e (3)

$$[\text{O}/\text{H}] = \log \frac{Z(\text{O})}{k_{\text{O}}} - \log \frac{Z_{\odot}(\text{O})}{k_{\text{O}}} = \log Z(\text{O}) - \log Z_{\odot}(\text{O})$$

usando (2)

$$[\text{O}/\text{H}] = \log y(\text{O}) + \log \omega t - \log Z_{\odot}(\text{O})$$

$$[\text{O}/\text{H}] = \log \frac{y(\text{O})}{Z_{\odot}(\text{O})} + \log \omega t$$

que é relação desejada

(b) Para o oxigênio temos

$$[\text{O}/\text{H}] \simeq \log 0.8 + \log 0.50 \simeq -0.10 - 0.30 \simeq -0.40$$

para o ferro

$$[\text{Fe}/\text{H}] \simeq \log 0.25 + \log 0.50 \simeq -0.60 - 0.30 \simeq -0.90$$

★ ★ ★

507. Considere um modelo “didático” simples para a evolução química galáctica supondo que desde o início da formação da Galáxia em $t = 0$, as estrelas estejam evoluindo de forma que o aumento na abundância Z dos elementos pesados seja constante, ou $dZ/dt = C$, onde C é uma constante a determinar. (a) Obtenha uma expressão para a variação de Z com o tempo. Admita que $Z = Z_1 = 0.028$

em $t = t_1 = 13 \text{ Gano}$. (b) Admita uma relação entre a metalicidade Z e as abundâncias por número de átomos do elemento X na forma $Z = k_X (X/H)$. Adote $Z = Z_0 = 0$ em $t = 0$, o valor global solar $Z = 0.0142$ e as abundâncias solares de O e Fe , $\epsilon(O) = 8.69$ e $\epsilon(Fe) = 7.50$ e determine as constantes k_O e k_{Fe} . (c) Obtenha relações para as abundâncias relativas ao Sol $[O/H]$ e $[Fe/H]$ em função da metalicidade. Como fica a relação para $[O/Fe]$? (d) Considere que a produção de Fe sofre um atraso com relação ao oxigênio, uma vez que o Fe é produzido principalmente pelas supernovas de tipo Ia, formadas por estrelas de massa intermediária, com tempos de vida mais longos. Admita que $k_{Fe} \simeq 1420$ para $[Fe/H] \leq -1$ e que $k_{Fe} = -216 t + 1874$ para $[Fe/H] > -1$, enquanto que $k_O \simeq 29 = \text{constante}$. Faça gráfico das relações $[Fe/H] \times t$ e $[O/Fe] \times [Fe/H]$.

Solução:

(a) Integrando a relação dada entre $t = 0$ e t , e escrevendo $Z(t = 0) = Z_0$

$$\int_{Z_0}^Z dZ = C \int_0^t dt \longrightarrow Z = Z_0 + C t$$

como $Z_1 = Z_0 + C t_1$ temos

$$C = \frac{Z_1 - Z_0}{t_1}$$

com $Z_0 = 0$ temos

$$Z(t) = 0.00215 t \quad (1)$$

(b) Com a definição das constantes temos

$$k_X = Z 10^{12 - \epsilon(X)}$$

onde $\epsilon(X) = \log X/H + 12$. Com os valores de Z e das abundâncias obtemos

$$k_O \simeq 29$$

$$k_{Fe} \simeq 450$$

(c) Da definição de k_X temos

$$\log (X/H) = \log \left[\frac{Z}{k_X} \right]$$

$$[O/H] = \log(O/H) - \log(O/H)_\odot = \log \left[\frac{Z}{k_O} \right] + 3.31 \quad (2)$$

$$[Fe/H] = \log(Fe/H) - \log(Fe/H)_\odot = \log \left[\frac{Z}{k_{Fe}} \right] + 4.50 \quad (3)$$

$$[O/Fe] = [O/H] - [Fe/H] = \log \left[\frac{k_{Fe}}{k_O} \right] - 1.19 \quad (4)$$

(d) Para baixas metalicidades $[Fe/H] \leq -1$ a relação idade-metalicidade

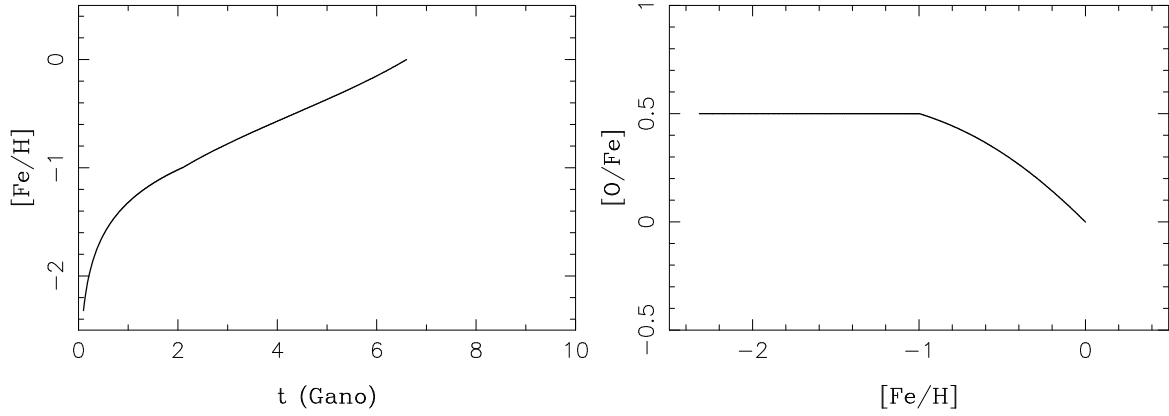
$[\text{Fe}/\text{H}] \times t$ e a relação $[\text{O}/\text{Fe}] \times [\text{Fe}/\text{H}]$ são dadas por

$$[\text{Fe}/\text{H}] \simeq \log t - 1.32$$

$$[\text{O}/\text{Fe}] = \log \left[\frac{k_{\text{Fe}}}{k_{\text{O}}} \right] - 1.19 = 0.5$$

Para as metalicidades mais altas, $[\text{Fe}/\text{H}] > -1$, tomando t como parâmetro, obtemos k_{Fe} pela relação dada; Z pode ser calculada por (1); $[\text{Fe}/\text{H}]$ por (3) e $[\text{O}/\text{Fe}]$ por (4). Os resultados estão na tabela e figuras a seguir.

t	k_{Fe}	Z	$[\text{Fe}/\text{H}]$	$[\text{O}/\text{Fe}]$
0.1	450	0.0002	-2.32	0.50
0.2	450	0.0004	-2.02	0.50
0.3	450	0.0006	-1.84	0.50
0.4	450	0.0009	-1.71	0.50
0.5	450	0.0011	-1.62	0.50
1.0	450	0.0022	-1.32	0.50
1.5	450	0.0032	-1.14	0.50
2.0	450	0.0043	-1.02	0.50
2.1	1420	0.0045	-1.00	0.50
2.5	1334	0.0054	-0.89	0.47
3.0	1226	0.0065	-0.78	0.44
4.0	1010	0.0086	-0.57	0.35
5.0	794	0.0108	-0.37	0.25
6.0	578	0.0129	-0.15	0.11
6.6	448	0.0142	+0.00	0.00



★ ★ ★

508. Considere o modelo “didático” de evolução química do exercício anterior. Adote $Z_{\odot} = 0.015$, $\epsilon(\text{O})_{\odot} = \log(\text{O}/\text{H})_{\odot} + 12 = 8.70$ e $\epsilon(\text{Fe})_{\odot} = \log(\text{Fe}/\text{H})_{\odot} + 12 = 7.50$ para a composição química solar. (a) Nas relações $Z = k_{\text{O}} (\text{O}/\text{H})$ e $Z = k_{\text{Fe}} (\text{Fe}/\text{H})$, quais seriam os valores das constantes k_{O} e k_{Fe} ? (b) Considerando um atraso na produção de Fe tal que a razão $[\text{O}/\text{Fe}]$ seja igual a 0.5 para $[\text{Fe}/\text{H}] < -1$, qual seria o novo valor da constante k_{Fe} para $[\text{Fe}/\text{H}] < -1$?

Solução:

$$(a) \quad Z \simeq k_{\text{O}} (\text{O}/\text{H}) \longrightarrow k_{\text{O}} = \frac{Z}{(\text{O}/\text{H})} = \frac{0.015}{10^{8.7-12}} \simeq 30$$

$$Z \simeq k_{\text{Fe}} (\text{Fe}/\text{H}) \longrightarrow k_{\text{Fe}} = \frac{Z}{(\text{Fe}/\text{H})} = \frac{0.015}{10^{7.5-12}} \simeq 470$$

$$(b) \quad [\text{O}/\text{H}] = \log \left[\frac{Z}{k_{\text{O}}} \right] + 3.30$$

$$[\text{Fe}/\text{H}] = \log \left[\frac{Z}{k_{\text{Fe}}} \right] + 4.50$$

$$[\text{O}/\text{Fe}] = [\text{O}/\text{H}] - [\text{Fe}/\text{H}]$$

temos

$$[\text{O}/\text{H}] = [\text{O}/\text{Fe}] + [\text{Fe}/\text{H}] = (0.5) + (-1) = -0.5$$

$$Z = 0.00475$$

$$k_{\text{Fe}} \simeq 1500$$

★ ★ ★

509. A relação $[\text{Mg}/\text{Fe}] \times [\text{Fe}/\text{H}]$ para uma amostra de estrelas do bojo mostra um decréscimo contínuo de $[\text{Mg}/\text{Fe}]$ para metalicidades $-1.0 \leq [\text{Fe}/\text{H}] \leq 0.0$. Aplique o “modelo didático” do Exercício 507 de acordo com o seguinte roteiro: (a) Estime a constante k_{Mg} definida pela relação $Z = k_{\text{Mg}} (\text{Mg}/\text{H})$, adotando a metalicidade global do Sol, $Z = 0.0142$ e o valor fotosférico da abundância de Mg, $\epsilon(\text{Mg}) = 7.60$. (b) Considere o modelo em que a produção de Fe tem um atraso com relação à produção de Mg, de modo que k_{Fe} não é uma constante, mas depende do tempo. Neste caso, como fica a relação para a razão $[\text{Mg}/\text{Fe}]$ em função da metalicidade Z ? (c) Obtenha uma relação $[\text{Mg}/\text{Fe}] \times [\text{Fe}/\text{H}]$ como uma função implícita do tempo. (d) Adote a relação $k_{\text{Fe}} = 1874 - 216 t$ no intervalo $-1.0 \leq [\text{Fe}/\text{H}] \leq 0.0$ e admita que $Z = 0.00215 t$, com t em Gano. Obtenha a razão $[\text{Mg}/\text{Fe}]$ para os valores da metalicidade $[\text{Fe}/\text{H}] = -1.0, -0.5$ e 0.0 .

Solução:

$$(a) \quad k_{\text{Mg}} = \frac{Z}{(\text{Mg}/\text{H})} \quad (1)$$

$$\epsilon(\text{Mg}) = \log (\text{Mg}/\text{H}) + 12$$

$$k_{\text{Mg}} = \frac{0.0142}{10^{7.6-12}} \simeq 357$$

$$(b) [\text{Mg}/\text{H}] = \log (\text{Mg}/\text{H}) - \log (\text{Mg}/\text{H})_{\odot}$$

de (1)

$$\log (\text{Mg}/\text{H}) = \log \left[\frac{Z}{k_{\text{Mg}}} \right]$$

$$[\text{Mg}/\text{H}] = \log \left[\frac{Z}{k_{\text{Mg}}} \right] - \left[\epsilon(\text{Mg}) - 12 \right]_{\odot}$$

$$\left[\epsilon(\text{Mg}) - 12 \right]_{\odot} = 7.6 - 12 = -4.4$$

$$[\text{Mg}/\text{H}] = \log \left[\frac{Z}{k_{\text{Mg}}} \right] + 4.4 \quad (2)$$

(c) A relação para $[\text{Fe}/\text{H}]$ pode ser escrita (cf. Exercício 507)

$$[\text{Fe}/\text{H}] = \log \left[\frac{Z}{k_{\text{Fe}}} \right] + 4.5 \quad (3)$$

de (2) e (3)

$$[\text{Mg}/\text{Fe}] = [\text{Mg}/\text{H}] - [\text{Fe}/\text{H}] = \log Z - \log k_{\text{Mg}} + 4.4 - \log Z + \log k_{\text{Fe}} - 4.5$$

portanto

$$[\text{Mg}/\text{Fe}] = \log \left[\frac{k_{\text{Fe}}(t)}{k_{\text{Mg}}} \right] - 0.1 \quad (4)$$

(d) Usando a relação dada para Z e a equação (3) eliminamos Z

$$[\text{Fe}/\text{H}] = \log(0.00215) + \log t - \log k_{\text{Fe}}(t) + 4.5 \quad (5)$$

$$\log t = [\text{Fe}/\text{H}] + \log k_{\text{Fe}}(t) - 1.83$$

$$t = 10^{[\text{Fe}/\text{H}] - 1.83} k_{\text{Fe}}(t) \quad (6)$$

da relação $k_{\text{Fe}}(t)$ e a equação (6) eliminamos t

$$216 t = 1874 - k_{\text{Fe}}(t)$$

$$t = \frac{1874}{216} - \frac{k_{\text{Fe}}(t)}{216} = 8.68 - \frac{k_{\text{Fe}}(t)}{216} \quad (7)$$

(6) e (7)

$$8.68 - \frac{k_{\text{Fe}}(t)}{216} = 10^{[\text{Fe}/\text{H}] - 1.83} k_{\text{Fe}}(t)$$

$$k_{\text{Fe}}(t) \left[10^{[\text{Fe}/\text{H}] - 1.83} + \frac{1}{216} \right] = 8.68$$

$$k_{\text{Fe}}(t) = 8.68 \left[10^{[\text{Fe}/\text{H}] - 1.83} + \frac{1}{216} \right]^{-1} \quad (8)$$

dado $[\text{Fe}/\text{H}]$ podemos calcular $k_{\text{Fe}}(t)$ por (8)

com $k_{\text{Fe}}(t)$ podemos calcular $[\text{Mg}/\text{Fe}]$ por (4)

t pode ser calculada por (7) ou (6) e Z pela relação $Z(t)$

os resultados estão na tabela a seguir (cf. Exercício 492)

	$[\text{Fe}/\text{H}]$	k_{Fe}	$[\text{Mg}/\text{Fe}]$	t	Z
A	-1.0	1420	0.50	2.10	0.0045
B	-0.5	933	0.32	4.36	0.0094
C	+0.0	447	0.00	6.61	0.0142

★ ★ ★

510. Um modelo teórico para o bojo obtem uma massa dinâmica total de $1.8 \times 10^{10} M_{\odot}$. (a) Admitindo que cerca de 20% desta massa é de matéria escura, qual seria a massa estelar do bojo? (b) Qual é a fração da massa estelar da Galáxia contida no bojo? (c) O modelo considera o bojo como uma caixa com as dimensões $2.2 \times 1.4 \times 1.2$ (kpc). Qual é a densidade de massa na forma de estrelas no bojo? (d) Qual seria a densidade de massa estelar do bojo projetada sobre o plano, medida em $M_{\odot}/\text{kpc}^2$?

Solução:

$$(a) M_d = M_* + M_e$$

$$M_* = M_d - M_e = M_d(1 - 0.2) = (0.8)(1.8 \times 10^{10}) \simeq 1.4 \times 10^{10} M_{\odot}$$

$$(b) f \simeq \frac{M_*}{M_G} \simeq \frac{1.4 \times 10^{10}}{M_G}$$

considerando o intervalo

$$5.0 \times 10^{10} \leq M_G(M_{\odot}) \leq 15 \times 10^{10}$$

$$\text{obtemos } 0.10 \leq f \leq 0.30$$

$$(c) V \simeq 2.2 \times 1.4 \times 1.2 \simeq 3.7 \text{ kpc}^3$$

$$n \simeq \frac{1.4 \times 10^{10}}{3.7} \simeq 3.8 \times 10^9 M_{\odot}/\text{kpc}^3$$

$$(d) \Sigma = n h_b \simeq (3.8 \times 10^9)(1.2) \simeq 4.6 \times 10^9 M_{\odot}/\text{kpc}^2$$

★ ★ ★

BIBLIOGRAFIA

A bibliografia contém uma lista das fontes dos dados usados. Os números entre colchetes indicam os exercícios correspondentes às referências.

Abramowitz, M., Stegun, I. A. 1965, Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables, Dover [98]

Allen, C. W. 1973, Astrophysical quantities, Athlone Press [93]

Bahcall, J. N., Piran, T. 1983, Astrophys. J. 267, L77 [464/465]

Bakes, E. L. O., Tielens, A. G. G. M. 1994, Astrophys. J. 427, 822 [379]

Bensby, T., Feltzing, S. et al. 2005, Astron. Astrophys. 433, 185 [492]

Cardelli, J. A., Savage, B. D. et al. 1991, Astrophys. J. 377, L57 [366]

Clayton, D. D. 1983, Principles of stellar evolution and nucleosynthesis, University of Chicago Press [97]

Clayton, D. D. 1985, Nucleosynthesis: challenges and new developments, ed. W. D. Arnett, J. W. Truran, Un. de Chicago, 65 [502/503/504]

Cowan, J. J., Thielemann, F. K., Truran, J. W., 1991, Annual Rev. Astron. Astrophys. 29, 447 [470]

Cowley, C. R. 2000, The Observatory 120, 318 [352]

Cox, A. N. 2000, Allen's Astrophysical Quantities, AIP [48/49/67/468]

Edvardsson, B., Andersson, J. et al. 1993, Astron. Astrophys. 275, 101 [482]

Eggen, O. J., Lynden-Bell, D., Sandage, A. R. 1962, Astrophys. J. 136, 748 [142]

Gibson, B. K., Fenner, Y. et al. 2003, Publ. Astron. Soc. Australia 20, 1 [484]

Gratton, R. G., Carretta, E. et al. 2003, Astron. Astrophys. 404, 187 [490]

Henry, R. C. 2002, Astrophys. J. 570, 697 [338]

House, F., Kilkenny, D. 1980, Astron. Astrophys. 81, 251 [326]

Ibata, R., Gibson, B. 2007, Scientific American, Abril 2007 [441]

- Iben, I., Laughlin, G. 1989, *Astrophys. J.* 341, 312 [470]
- Iping, R., Sonneborn, G. 2003, *IAU Symposium* 209, 187 [209]
- Jorgensen, U. G., Hron, J., Loidi, R. 2000, *Astron. Astrophys.* 356, 253 [57]
- Kennicutt R. C. 1989, *Astrophys. J.* 344, 685 [479]
- Kennicutt, R. C. 1998, *Annual Rev. Astron. Astrophys.* 36, 189 [478]
- Kippenhahn, R., Weigert, A. 1994, *Stellar structure and evolution*, Springer. 2a. ed. Kippenhahn, R., Weigert, A., Weiss, A. 2012, Springer [89]
- Kurucz, R. L. 1979, *Astrophys. J. Suppl.* 40, 1 [67]
- Kwok, S. 2007, *Physics and chemistry of the interstellar medium*, USB [382]
- Lynden-Bell, D. 1975. *Vistas in Astronomy* 19, 299 [505]
- Maciel, W. J. 1999, *Introdução à estrutura e evolução estelar*, Edusp, reimpressão 2018 [16/22/23/76/99/105/107/111/116/119/120/133/466] ver também Maciel 2015)
- Maciel, W. J. 2002, *Astrofísica do meio interestelar*, Edusp [329/338/344/345/374/375/376/384/390] (ver também Maciel 2013)
- Maciel, W. J. 2005, *Hidrodinâmica e ventos estelares: uma introdução*, Edusp [149/156/162/164/176/177/187/191/211/215] (ver também Maciel 2014)
- Maciel, W. J. 2013, *Astrophysics of the interstellar medium*, Springer
- Maciel, W. J. 2014, *Hydrodynamics and stellar winds: An introduction*, Springer
- Maciel, W. J. 2015, *Introduction to stellar structure*, Springer
- Maciel, W. J. 2020, *Fundamentos de evolução química da Galáxia*, IAG/USP [427/448/498/499/ 500/503/504/505/506/507]
- Maciel, W. J., Rocha-Pinto, H. J. 1998, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 299, 889 [475]
- Mathis, J. S. 1990, *Annual Rev. Astron. Astrophys.* 28, 37 [402]
- Mezger, P. G. 1978, *Infrared astronomy*, ed. G. G. Setti, G. G. Fazio, Reidel, Dordrecht, 1 [329]

- Miller, G. E., Scalo, J. M., 1979, *Astrophys. J.* 41, 513 [471/477]
- Morton, D. C., Smith, W. H. 1973, *Astrophys. J. Suppl.* 26, 333 [364]
- Pagel, B. E. J. 1997, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 288, 108 [506]
- Pagel, B. E. J. 2009, *Nucleosynthesis and chemical evolution of galaxies*, Cambridge University Press, 2a. ed. [506]
- Prantzos, N. 2009, *Light elements in the universe*, IAU Symp. 268, ed. C. Charbonnel et al., Cambridge University Press [460]
- Prialnik, D. 2009, *An introduction to the theory of stellar structure and evolution*, 2a. ed., Cambridge University Press [78]
- Rana, N. C. 1991, *Annual Rev. Astron. Astrophys.* 29, 129 [482/486]
- Reimers, D. 1975, *Mem. Soc. Roy. Sci. Liège*, 6 ser. 8, 389 [173]
- Rocha-Pinto, H. J., Maciel, W. J. 1996, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 279, 447 [487]
- Rocha-Pinto, H. J., Maciel, W. J. et al. 2000, *Astron. Astrophys.* 358, 850 [482]
- Romano, D., Chiappini, C. et al. 2005, *Astron. Astrophys.* 430, 491 [465]
- Ryan, S. G., Norton, A. W. 2010, *Stellar evolution and nucleosynthesis*, Cambridge University Press [143]
- Salpeter, E. E., 1955, *Astrophys. J.* 121, 161 [471/472/473]
- Schmidt, M. 1959, *Astrophys. J.* vol. 129, p. 243 [477]
- Stasińska, G. 2000, XIII Canary Island Winter School of Astrophysics, astro-ph 0207500 [394/440/497]
- Swihart, T. L. 1968, *Astrophysics and stellar astronomy*, Wiley [46]
- Vassiliadis, E., Wood, P. R. 1993, *Astrophys. J.* 413, 641 [172]
- Werner, M. W., Salpeter, E. E. 1969, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 145, 249 [336]

SOBRE O AUTOR

Walter Junqueira Maciel nasceu em Cruzília, MG. Graduiu-se em Física pela UFMG, em Belo Horizonte, obteve o mestrado no ITA, em São José dos Campos, e o doutoramento na USP, em São Paulo. Fez estágios em Groningen, Holanda, e Heidelberg, Alemanha. É professor titular no Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da USP, onde trabalha desde 1974, tendo sido chefe do departamento no período 1992–1994. Publicou mais de cento e oitenta artigos de pesquisa em publicações internacionais e cerca de setenta artigos de pesquisa, trabalhos didáticos e de divulgação em publicações nacionais. É autor dos livros *Introdução à Estrutura e Evolução Estelar* (Edusp, 1999), prêmio Jabuti em 2000 na categoria de Ciências Exatas, Tecnologia e Informática; *Astrofísica do Meio Interestelar* (Edusp, 2002), finalista do prêmio Jabuti, 2003; *Hidrodinâmica e Ventos Estelares: Uma Introdução* (Edusp, 2005), finalista do prêmio Jabuti, 2006. Todos esses títulos também foram publicados em inglês pela editora Springer.

ISBN: 978-65-88233-00-9

CDL



9 786588 233009